الأكاديمية الجهوية للتربية والتكوين جهة فاس مكناس - مديرية فاس الثانوية التأهيلية عبد الله الشفشاوني	درس : إتصال دالة عددية La Continuité d'une fonction numérique	المستوى: الثانية باكالوريا مسلك : علوم فيزيائية السنة الدراسية: 2020/2021

0. تذكير: النهايات

نشاط: سلسلة مراجعة النهايات

الأشكال الغير المحددة هي : $+\infty-\infty$;; $0\times\infty$;; $\frac{\infty}{\infty}$;; $\frac{0}{0}$

خاصيات النهايات:

خاصية 01:

نهاية دوال اعتيادية في $\pm\infty$:

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{\sqrt{x}}=0 \;;\; \lim_{x\to+\infty}\frac{1}{x^3}=0 \;;\; \lim_{x\to+\infty}\frac{1}{x^2}=0 \;;\; \lim_{x\to+\infty}\frac{1}{x}=0 \;;$$

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{1}{\sqrt{|x|}}=0 \;;\; \lim_{x\to-\infty}\frac{1}{x^3}=0 \;;\; \lim_{x\to-\infty}\frac{1}{x^2}=0 \;;\; \lim_{x\to-\infty}\frac{1}{x}=0 \;;$$

خاصية 02:

نهاية دوال اعتيادية في 0 :

$$\lim_{x\to0^+}\frac{1}{\sqrt{x}}=+\infty \;;\; \lim_{x\to0^+}\frac{1}{x^3}=+\infty \;;\; \lim_{x\to0^+}\frac{1}{x^2}=+\infty \;;\; \lim_{x\to0^+}\frac{1}{x}=+\infty \;;$$

$$\lim_{x\to0^-}\frac{1}{\sqrt{|x|}}=+\infty \;;\; \lim_{x\to0^-}\frac{1}{x^3}=-\infty \;;\; \lim_{x\to0^-}\frac{1}{x^2}=+\infty \;;\; \lim_{x\to0^-}\frac{1}{x}=-\infty \;;$$

خاصية 03:

أ- نهاية الدوال الحدودية:

1- نهاية دالة حدودية عند a هي صورة العدد a ، بتعبير اخر : $\lim_{x\to a}P(x)=P(a)$

2- نهاية دالة حدودية عند $+\infty$ أو $-\infty$ هي نهاية حدها الأكبر درجة ،بتعبير اخر $\lim_{x\to\pm\infty}a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\ldots+a_0=\lim_{x\to\pm\infty}a_nx^n$

ب- نهاية الدوال الجذرية:

1- نهاية دالة جذرية عند a هي صورة العدد a ، بتعبير اخر : $Q(a)\neq0$; $\lim_{x\to a}\frac{P(x)}{Q\ x}=\frac{P(a)}{Q(a)}$

2- نهاية دالة جذرية عند $+\infty$ أو $-\infty$ هي نهاية خارج حديها الأكبر درجة ،بتعبير اخر $\lim_{x\to\pm\infty}\frac{a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\ldots+a_0}{b_mx^m+b_{m-1}x^{m-1}+\ldots+b_0}=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{a_nx^n}{b_mx^m}$

خاصية 04:

نهاية الدوال المثلثية الاعتيادية:

$$\lim_{x\to0}\frac{1-\cos\ x}{x^2}=\frac{1}{2} \;;;\; \lim_{x\to0}\frac{\tan\ x}{x}=1 \;;;\; \lim_{x\to0}\frac{\sin\ x}{x}=1$$

خاصية 05:

النهايات والترتيب:

$$\begin{cases} g\ x\le f\ x\le h\ x \\ \lim_{x\to a}g\ x=\lim_{x\to a}h\ x=l \end{cases}\Rightarrow\lim_{x\to a}f\ x=l \;;;\; \begin{cases} |f\ x-l|\le h\ x \\ \lim_{x\to a}h\ x=0 \end{cases}\Rightarrow\lim_{x\to a}f\ x=l$$

$$\begin{cases} f\ x\le h\ x \\ \lim_{x\to a}h\ x=-\infty \end{cases}\Rightarrow\lim_{x\to a}f\ x=-\infty \;;;\; \begin{cases} g\ x\le f\ x \\ \lim_{x\to a}g\ x=+\infty \end{cases}\Rightarrow\lim_{x\to a}f\ x=+\infty$$

I. الاتصال في نقطة – الاتصال في مجال:

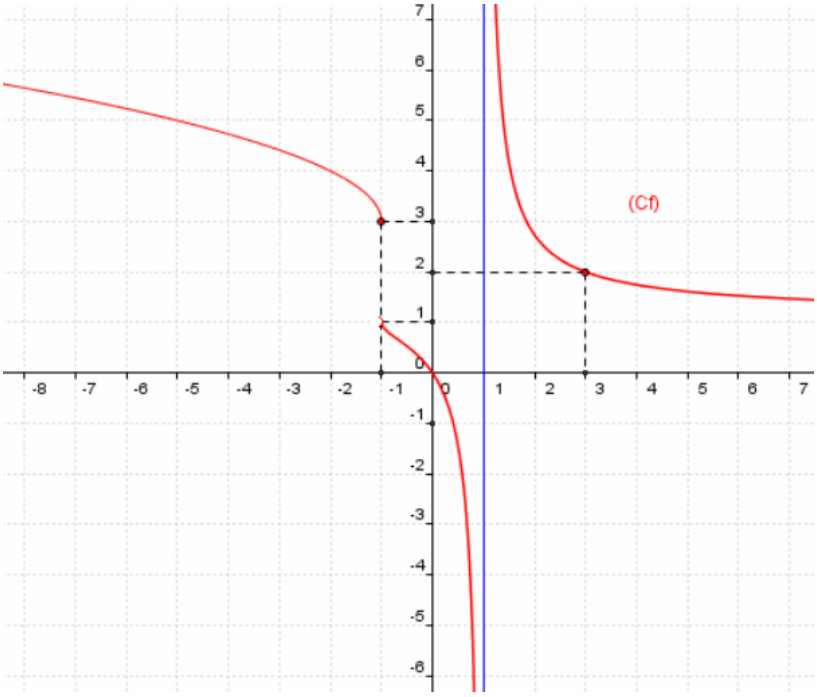
1. اتصال دالة في نقطة

نشاط :

لتكن f دالة عددية و C_f منحناها الممثل أسفله في معلم متعامد ممنظم O,I,J

1) مبيانيا أحسب مايلي:

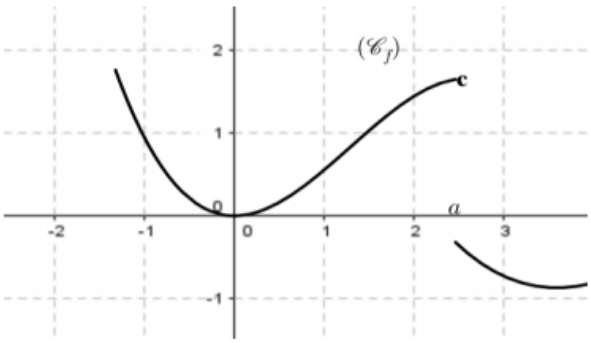
$f\ 2\ ;f\ -2\ ;f\ 1\ ;f\ -1$



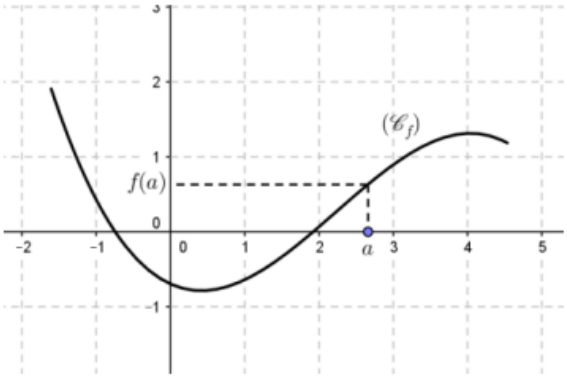
1/ 1 تعريف:

لتكن f دالة عددية معرفة على مجال مفتوح I و a عنصر من I ، تكون f متصلة في a إذا وفقط إذا كان $\boxed{\lim_{x\to a} f\ x = f\ a}$

مثال :



f دالة غير متصلة في a



f دالة متصلة في a

2/ 1 تطبيقات :

تطبيق 01 :

نعتبر الدوال العددية f و g المعرفة بما يلي: $\begin{cases} f\ x = \dfrac{x^3-2x+1}{x-1} ; x\neq 1 \\ f\ 1 = 1 \end{cases}$ و $\begin{cases} g\ x = \dfrac{\sqrt{x}-1}{x-1} ; x\neq 1 \\ g\ 1 = 3 \end{cases}$.

أدرس اتصال الدالتين f و g في النقطة 1 .

تطبيق 02 :

لتكن f الدالة المعرفة بمايلي :

$$\begin{cases} f(x) = -7x+11 & x \le 3 \\ f(x) = \dfrac{3x-18}{x^2-5x+6} & x > 3 \end{cases}$$

1) أحسب $f(5)$ و $f(0)$ و $f(3)$

2) أحسب $\lim\limits_{x \to 3^+} f\ x$ ، ماذا تلاحظ ؟

3) أحسب $\lim\limits_{x \to 3^-} f\ x$ ، ماذا تلاحظ ؟

4) أدرس إتصال الدالة f في النقطة 3

2. الاتصال على اليمين – الاتصال على اليسار

2 /1 تعريف:

لتكن f دالة عددية معرفة على مجال على شكل $[\ a\ , a+\alpha\ [$ بحيث$(\alpha > 0)$.

نقول إن الدالة f متصلةعلى اليمين في a إذا كان $\boxed{\lim\limits_{x \to a^+} f\ x = f\ a}$

لتكن fدالة عددية معرفة على مجال على شكل $]a-\ \alpha,\ a]$بحيث$(\alpha > 0)$.

نقول إن الدالة f متصلةعلى اليسار في a إذا كان $\boxed{\lim\limits_{x \to a^-} f\ x = f\ a}$

2 /2 خاصية :

لتكن f دالة عددية معرفة على مجال مفتوح I و a عنصر من I ، تكون f متصلة في a إذا وفقط إذا كانت متصلة على اليمين ومتصلةعلى اليسار في a أي:

$$\boxed{\lim_{x \to a^+} f\ x = \lim_{x \to a^-} f\ x = f\ a}$$

2 /3 تطبيق:

A. لتكن f الدالة المعرفة بمايلي :

$$\begin{cases} f(x) = \dfrac{x-1}{2x+1} & x \le 1 \\ f(x) = \dfrac{5x^2+2x-7}{\sqrt{x-1}} & x > 1 \end{cases}$$

1) أحسب $f(1)$ و $f(0)$ و $f(3)$

2) أدرس إتصال الدالة f في النقطة 1

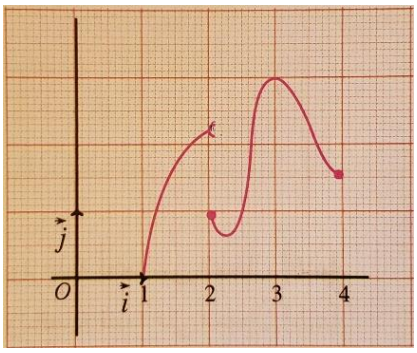
B. لتكن f الدالة المعرفة بمايلي :

$$\begin{cases} f(x) = \dfrac{x^2-5x+6}{x-2} & x < 2 \\ f(x) = \dfrac{\sqrt{3x-6}}{x-2} & x > 2 \\ f(2) = -1 \end{cases}$$

1) أحسب $f(1)$ و $f(0)$ و $f(3)$

2) أدرس إتصال الدالة f على اليمين و على اليسار في النقطة 2 ،

نشاط :



نعتبر في الشكل أسفله منحنى دالة عددية f معرفة على المجال a,b

1- أدرس اتصال الدالة f على اليمين وعلى اليسار في 2

2- هل الدالة متصلة على في كل نقطة a من المجال $1;4$ ؟

إذاكانت f متصلة في كل نقطة من $1;4$ نقول أن f متصلة على المجال $1;4$

3- هل الدالة f متصلة على المجالات $2;4$ و $1;2$ و $1;3$ ؟

لدينا f متصلة على المجال $1;3$ ومتصلة على اليمين في 3 وعلى اليسار في 4

نقول في هذه الحالة أن f متصلة على المجال $1;3$

3. الاتصال على مجال

3 /1 تعريف :

نقول إن f متصلة على مجال مفتوح I إذا كانت متصلة في كل نقطة من I .

تكون f متصلة على المجال a,b إذا كانت متصلة في كل نقطة من a,b و متصلة على اليمين في a وعلى اليسار في b

ملاحظة:

نعرف بالمثل اتصال دالة على كل من المجالات $a;b$ و $a;+\infty$ و $b;a$ و $-\infty;a$

3 /2 خاصية : اتصال الدوال الاعتيادية

خاصية :

الدوال الحدودية والدوال الجذرية والدوال : $x\mapsto\sqrt{x}$ و $x\mapsto\cos x$ و $x\mapsto\sin x$ و $x\mapsto\tan x$ متصلة على كل مجال ضمن مجموعة تعريفها

مثال:

1- لتكن f دالة عددية معرفة بمايلي: $f(x)=3x^2-1-\frac{1}{4}$ هل f متصلة على المجال $\left[0;\frac{1}{2}\right[$ ؟

2- لتكن f دالة عددية معرفة بمايلي: $f(x)=1-\frac{7}{6x-4}$ هل f متصلة على المجال $\left[\frac{1}{2};1\right]$ ؟

3- لتكن f دالة عددية معرفة بمايلي: $\begin{cases} f(x)=3x^2-1-\frac{1}{4} \ ; \ x\in\left[0;\frac{1}{2}\right[\\ f(x)=1-\frac{7}{6x-4} \ ; \ x\in\left[\frac{1}{2};1\right] \end{cases}$ بين أن f متصلة على المجال $0;1$

تطبيق 01:

ادرس اتصال الدالة f المعرفة على I في كل حالة من حالة:

1) $f(x)=5x-7$; $I=\mathbb{R}$

2) $f(x)=\sqrt{-2x+3}$; $I=]-\infty;1]$

3) $f(x)=\frac{3x+1}{2x-4}$; $I=]2;+\infty[$

4) $f(x)=x^2-6x+11+\sin(x)$; $I=[3;+\infty[$

5) $f(x)=x\cos(x)$; $I=\left]-\infty;\frac{1}{2}\right]$

6) $f(x)=\frac{3x+1}{\sqrt{x}}$; $I=]2;+\infty[$

4. العمليات على الدوال المتصلة

4/1 خاصية :

إذا كانت f و g دالتين متصلتين على مجال I فإن $f+g$ و $f\times g$ و $\lambda\times f$ دوال متصلة على I .

♠إذا كانت f و g دالتين متصلتين علر مجال I و $(\forall x\in I);\ g(x)\neq 0$ فإن $\frac{f}{g}$ متصلة على I .

♠إذا كانت f متصلة على مجال I فإن الدالة $|f|$ متصلة على I

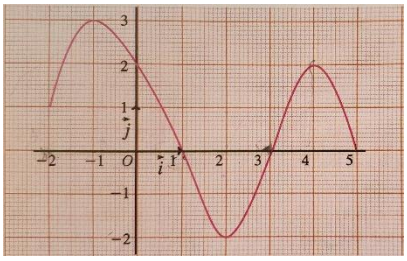
4/2 تطبيق :

سلسلة 01

نشاط:

الشكل أسفله يمثل منحنى دالة عددية f معرفة على المجال $-2;5$

أتنقل الجدول التالي الى دفتر ثم املأ اعتمادا على الشكل أعلاه :



المجال I	رتابة الدالة	صورة المجال I	القيمة الدنيا على I	القيمة القصوى على I
$-2;-1$				
$-1;2$				
$2;4$				
$4;5$				

II. صورة مجال لدالة متصلة

1. صورة قطعة- صورة مجال

خاصية

صورة قطعة بدالة متصلة هي قطعة

صورة مجال بدالة متصلة هي مجال

2. صورة مجال بدالة متصلة ورتيبة قطعا

خاصية

لتكن f دالة متصلة على مجال I. في الجدول التالي a و b عددان حقيقيان أو $+\infty$ أو $-\infty$.

	صورة المجال I بالدالة f	
المجال I	f تزايدية قطعا على I	f تناقصية قطعا على I
$[a,b]$	$[f(a),f(b)]$	$[f(b),f(a)]$
$[a,b[$	$\left[f(a),\lim\limits_{x\to b^-}f(x)\right[$	$\left]\lim\limits_{x\to b^-}f(x),f(a)\right]$
$]a,b]$	$\left]\lim\limits_{x\to a^+}f(x),f(b)\right]$	$\left[f(b),\lim\limits_{x\to a^+}f(x)\right[$
$]a,b[$	$\left]\lim\limits_{x\to a^+}f(x),\lim\limits_{x\to b^-}f(x)\right[$	$\left]\lim\limits_{x\to b^-}f(x),\lim\limits_{x\to a^+}f(x)\right[$

تطبيقات :

تطبيق 01 :

نعتبر الدالة f المعرفة بما يلي : $f(x)=x^2-2x-1$

1) اعط جدول تغيرات الدالة f .

2) حدد صور المجالات الدالية بالدالة f : $I=[1;2]$; $J=[-3;0]$; $K=[3;+\infty[$; $L=[-1;2[$; $H=]-\infty;-2[$

تطبيق 02 : سلسلة 01 تمرين 08

3. اتصال مركب دالتين

خاصية

لتكن f دالة متصلة على I ولتكن g دالة متصلة على J و $f\ I\subset J$

الدالة gof متصلة على I

مثال :

لتكن f دالة معرفة بمايلي: $f\ x=\cos\ x^2+3x-1$

بين أن f متصلة على $I=-\infty;0$

نتيجة :

تكون الدالة $\sqrt{f}$ متصلى على I إذاكانت f متصلة وموجبة على I

تطبيق:

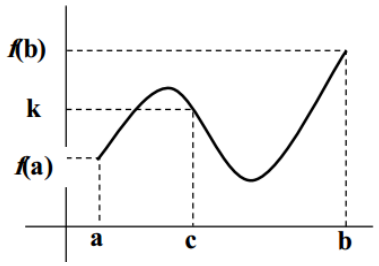
ادرس اتصال الدالة $x\mapsto\sqrt{1-\sin\ x}$

III. مبرهنة القيم الوسطية

مبرهنة

لتكن f دالة متصلة على مجال I و a و b عنصرين من I

لكل عدد k محصور بين $f\ a$ و $f\ b$ يوجد على الأقل عنصر c محصور بين a و b بحيث $f\ c=k$



نتيجة :

إذا كانت f متصلة على مجال $a;b$

و $f\ a\times f\ b<0$

فإن حسب مبرهنة القيم الوسيطية المعادلة $f\ x=0$ تقبل على الأقل حلا على المجال $a;b$

تطبيق:

1. بين أن المعادلة $x^3+5x-4=0$ تقبل على الأقل حلا على المجال $0;1$
2. بين أن المعادلة $x^3-2x^2+x=-2$ تقبل على الأقل حلا على المجال $0;1$
3. لتكن f دالة عددية معرفة بمايلي $f\ x=x^5+2x-1$ بين أن C_f منحنى الدالة f يقطع محور الأفاصيل OX في نقطة أصولها α في $\mathbb{R}$
4. بين أن المعادلة $x^3+x+1=0$ تقبل حلا وحيدا α في $\mathbb{R}$ ، ثم بين أن : $-1<\alpha<0$

ملحوظة :

$\left.\begin{array}{l}\text{إذاكانت المعادلة } f\ x=0 \text{ تقبل على الأقل حلا على المجال } a;b\\ \text{و الدالة } f \text{ رتيبة قطعا على المجال } a;b\end{array}\right\}\Leftarrow$ فإن المعادلة $f\ x=0$ تقبل حلا وحيدا على المجال $a;b$

IV. طريقة التفرع الثنائي

تستعمل هاته الطريقة لإيجاد تأطير للعدد α بالدقة المطلوبة

لكي نؤطر الحل α بالدقة l نتبع الخطوات التالية:

<table>
<tr><td colspan="3">لدينا $\alpha \in a;b$ ، نحسب سعة المجال $a;b$
أي $b-a$</td></tr>
<tr><td colspan="2">إذاكان $b-a>l$
نقوم بحساب مركز المجال $c=\frac{a+b}{2}$</td><td>إذاكان $b-a<l$
فإننا نقول أنه وجدنا التأطير المطلوب للحل α بالدقة l</td></tr>
<tr><td>إذاكان $f\ a \times f\ c<0$
فإن $\alpha \in a;c$
إذن انحسب سعة المجال $a;c$
أي $c-a$</td><td>إذاكان $f\ a \times f\ c>0$
فإن $\alpha \in c;b$
إذن انحسب سعة المجال $c;b$
أي $b-c$</td><td rowspan="2"></td></tr>
<tr><td colspan="2">ونعيد نفس المراحل الى حين تكون سعة المجال أصغر من l</td></tr>
</table>

مثال:

علما أن المعادلة $x^3+x^2+1=0$ تقبل حلا وحيدا α بحيث $-1<\alpha<0$

حدد تأطيرا للعدد α سعته $0,25$

V. الدالة العكسية لدالة متصلة

1. الدالة العكسية

خاصية:

إذاكانت f دالة عددية متصلة ورتيبة قطعا على مجال I ،فإن لكل y من $J=f\ I$ ، المعادلة $f\ x=y$ تقبل حلا وحيدا في المجال I

تعريف:

لتكن f دالة عددية متصلة ورتيبة قطعا على مجال I ،و $J=f\ I$

الدالة التي تربط كل عنصر y من J بالعنصر الوحيد x من I بحيث : $f\ x=y$ ، تسمى الدالة العكسية للدالة f ، ونرمز لها بالرمز f^{-1}

نتائج:

إذاكانت f دالة عددية متصلة ورتيبة قطعا على مجال I ،و $J=f\ I$

فإن f تقبل دالة عكسية f^{-1} معرفة على المجال J بحيث $J=f\ I$.

ولدينا:

$$\begin{cases} f^{-1}\ x=y \\ x\in J \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} f\ y=x \\ y\in I \end{cases}$$

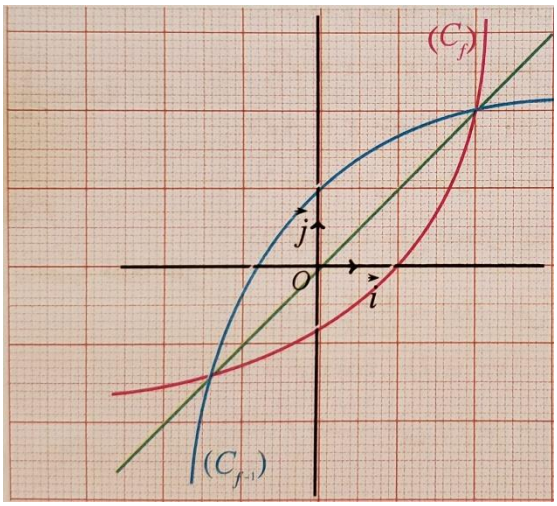
$$\forall x\in I\ ;\ f^{-1}of\ x=x$$

$$\forall x\in J\ ;\ fof^{-1}\ x=x$$

2. خاصيات الدالة العكسية

في معلم متعامد ممنظم O,I,J

ليكن $C_{f^{-1}}$ منحنى الدالة f^{-1} و C_f منحنى الدالة f



لدينا انطلاقا من الشكل التالي :

- الدالة f^{-1} متصلة على المجال J
- الدالة f^{-1} رتيبة قطعا على المجال J ولها نفس رتابة الدالة f على المجال I
- لدينا $C_{f^{-1}}$ و C_f متماثلان بالنسبة للمنصف الأول في معلم متعامد ممنظم O,I,J
  المنصف الأول هو المستقيم الذي معادلته $y=x$

تطبيقات:

طرق : Astuces

1. لنبين أن f تقبل دالة عكسية f^{-1} : لدينا:

إذاكانت و الدالة f متصلة على المجال I و الدالة f رتيبة قطعا على المجال I $\Leftarrow$ فإن f تقبل دالة عكسية f^{-1} معرفة على مجال J بحيث $J = f\ I$

2. لتحديد تعبير الدالة f^{-1} . لدينا :

لدينا f تقبل دالة عكسية f^{-1} معرفة على المجال J بحيث: $\begin{cases} f^{-1}\ x = y \\ x \in J \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} f\ y = x \\ y \in I \end{cases}$

انطلاقا من المعادلة $f\ y = x$ حيث $x \in J$ و $y \in I$ لنحدد y بدلالة x

3. لتحديد رتابة الدالة f^{-1} . لدينا :

لدينا الدالة f^{-1} رتيبة قطعا على المجال J ولها نفس رتابة الدالة f على المجال I

4. للإنشاء $C_{f^{-1}}$ منحنى الدالة f^{-1} ، لدينا :

لدينا $C_{f^{-1}}$ و C_f متماثلان بالنسبة للمنصف الأول في معلم متعامد ممنظم O,I,J

تطبيق 01:

1- نعتبر الدالة العددية f المعرفة على $\mathbb{R}$ بما يلي : $f(x) = -4x+1$ ،

أ- بين أن f تقبل دالة عكسية f^{-1} معرفة على مجال J يجب تحديده.

ب- حدد $f^{-1}\ x$ لكل x من J

2- نعتبر الدالة العددية g المعرفة على $\left]\frac{3}{2};+\infty\right[$ بما يلي : $g(x) = \frac{4x+1}{3-2x}$ ،

أ- بين أن g تقبل دالة عكسية معرفة على مجال J يجب تحديده.

ب- حدد $g^{-1}(x)$ لكل x من J

تطبيق 02:

نعتبر الدالة العددية f المعرفة على $\mathbb{R}$ بما يلي : $f(x) = 2x^2 - 4x + 1$

1)- ادرس تغيرات f وأنشئ منحناها في معلم متعامد ممنظم.

2)- ليكن g قصور الدالة f على المجال $I = [1,+\infty[$.

أ/- بين أن الدالة g تقبل دالة عكسية معرفة على مجال J يجب تحديده.

ب/- حدد $g^{-1}(x)$ لكل x من J وارسم $C_{g^{-1}}$.

تطبيق 04

نعتبر الدالة العددية f المعرفة بما يلي : $f(x) = \sqrt{x^2+1}$

1)- حدد D_f ثم ادرس تغيرات f وأنشئ منحناها في معلم متعامد ممنظم.

2)- ليكن g قصور الدالة f على المجال $I = [0,+\infty[$.

أ/- بين أن الدالة g تقبل دالة عكسية معرفة على مجال J يجب تحديده.

ب/- حدد $g^{-1}(x)$ لكل x من J وارسم $C_{g^{-1}}$.

VI. دالة الجذر من الرتبة n

نشاط:

نعتبر الدالة العددية f المعرفة على $I=[0,+\infty[$ بمايلي: $f(x)=x^n$ حيث $n\in\mathbb{N}^*$

بين أن بين أن f تقبل دالة عكسية f^{-1} معرفة على مجال J يجب تحديده.

تعريف و خاصية

ليكن $n\in\mathbb{N}^*$ ، الدالة العكسية للدالة المعرفة على $I=[0,+\infty[$ بمايلي: $x\mapsto x^n$ تسمى دالة الجذر من الرتبة n ،ونرمز لها بالرمز $x\mapsto\sqrt[n]{x}$

العدد $\sqrt[n]{x}$ يسمى الجذر من الرتبة n للعدد x .لدينا:

- الدالة $x\mapsto\sqrt[n]{x}$ متصلة وتزايدية قطعا على $I=[0,+\infty[$ و لدينا $\lim\limits_{x\to+\infty}\sqrt[n]{x}=+\infty$
- في معلم متعامد ممنظم، منحنى الدالة $x\mapsto\sqrt[n]{x}$ هو مماثل منحنى الدالة $x\mapsto x^n$ بالنسبة للمنصف الأول

ملحوظة: $\sqrt[1]{x}=x$ و $\sqrt[2]{x}=\sqrt{x}$ و $\sqrt[3]{x}$ يسمى الجذر المكعب للعدد x

نتائج:

ليكن $n,m\in\mathbb{N}^*$ و $x,y\in\mathbb{R}^+$ لدينا:

- $\sqrt[n]{x^m}=\sqrt[n]{x}^{\,m}$
- $\sqrt[n]{x}=y\Leftrightarrow x=y^n$
- $\sqrt[n]{x}=\sqrt[n]{y}\Leftrightarrow x=y$ و $\sqrt[n]{x}>\sqrt[n]{y}\Leftrightarrow x>y$

مثال:

لدينا : $\sqrt[3]{8}=\sqrt[3]{2^3}=2$ و $\sqrt[4]{81}=\sqrt[4]{3^4}=3$

خاصيات :

ليكن $n,m\in\mathbb{N}^*$ و $x,y\in\mathbb{R}^+$ لدينا:

- $\sqrt[n]{x}\times\sqrt[n]{y}=\sqrt[n]{xy}$ و $\dfrac{\sqrt[n]{x}}{\sqrt[n]{y}}=\sqrt[n]{\dfrac{x}{y}}$
- $\sqrt[n]{\sqrt[m]{x}}=\sqrt[nm]{x}$ و $\sqrt[n]{x}=\sqrt[nm]{x^m}$

حل معادلات من نوع $x^n=a$ حيث $x\in\mathbb{R}$

حل في $\mathbb{R}$ المعادلات التالية: $x^{10}=-5$ ؛ $x^{10}=5$ ؛ $x^3=5$ ؛ $x^3=-5$

$(x-1)^4=-1$ ؛ $(x+1)^3=-27$ ؛ $\sqrt{x^2-4}=x-2\sqrt{x^2-1}$

خاصية :

ليكن $n\in\mathbb{N}^*$ ولتكن f دالة عددية

إذاكانت f متصلة وموجبة على I ، فإن الدالة $\sqrt[n]{f}$ متصلة على I

- $\lim\limits_{x\to a}f(x)=l\Leftrightarrow\lim\limits_{x\to a}\sqrt[n]{f(x)}=\sqrt[n]{l}$
- $\lim\limits_{x\to a}f(x)=+\infty\Leftrightarrow\lim\limits_{x\to a}\sqrt[n]{f(x)}=+\infty$

تطبيق :

أحسب النهايات التالية:

1) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sqrt[3]{x}-1}{\sqrt{x}-1}$

2) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(2x-\sqrt[3]{x^3+1}\right)$

3) $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\sqrt[3]{x^3+2}-x}{1-2x}$

4) $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(2x+\sqrt[3]{2-x^3}\right)$

5) $\lim\limits_{x\to+\infty}\sqrt[5]{x}-\sqrt[3]{x}$

6) $\lim\limits_{x\to+\infty}\sqrt[3]{x^3+1}-x$

7) $\lim\limits_{x\to+\infty}\sqrt[3]{x^3+x+1}-\sqrt{x^2-1}$

8) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sqrt[3]{\cos(x)}-\sqrt[4]{\cos(x)}}{\sin^2(x)}$

VII. القوة الجذرية لعدد حقيقي موجب قطعا

نشاط:

أحسب $16^{0,5}$ ، $81^{0,25}$

تعريف:

ليكن x عددا حقيقيا موجبا قطعا و r عددا جريا غير منعدم

نسمي القوة الجذرية للعدد x ذات الأساس r العدد الذي نرمز له بالرمز x^r

والمعرف بمايلي : $x^r = x^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{x^m}$ مع $n \in \mathbb{N}^*$ و $m \in \mathbb{Z}^*$

مثال:

$$16^{0,5} = 16^{\frac{1}{2}} = \sqrt{16} = \sqrt{4^2} = 4 \quad \text{و} \quad 81^{0,25} = 81^{\frac{1}{4}} = \sqrt[4]{81} = \sqrt[4]{3^4} = 3$$

$$6^{-\frac{3}{2}} = \frac{1}{6^{\frac{3}{2}}} = \frac{1}{\sqrt{6^3}} = \frac{1}{\sqrt{6^2 \times 6}} = \frac{1}{\sqrt{6^2} \times \sqrt{6}} = \frac{1}{6\sqrt{6}} = \frac{\sqrt{6}}{36}$$

خاصيات:

ليكن $n, m \in \mathbb{N}^*$ و $x, y \in \mathbb{R}^+$ لدينا:

- $\sqrt[n]{x^m} = \sqrt[n]{x}^{\,m} = x^{\frac{1}{n} \times m} = x^{\frac{m}{n}}$ ، $\sqrt[n]{x} = x^{\frac{1}{n}}$
- $x^r \times x^{r'} = x^{r+r'}$ ، $\frac{x^r}{x^{r'}} = x^{r-r'}$
- $x^r \times y^r = xy^{\,r}$ ، $\frac{x^r}{y^r} = \left(\frac{x}{y}\right)^r$
- $x^{-r} = \frac{1}{x^r}$; $x \neq 0$

تطبيق:

1)- بسط الأعداد التالية : $A = \sqrt[4]{625}$ ؛ $B = 2\sqrt[4]{6561} - 5\sqrt[3]{27} - 3\sqrt[4]{256}$ ؛ $C = \frac{\sqrt[3]{4} \times \sqrt{8} \times \left(\sqrt[5]{\sqrt{2}}\right)^2}{\sqrt{\sqrt[3]{4}}}$

2)- قارن العددين : $\sqrt[5]{2}$ و $\sqrt[7]{3}$

3)- رتب تزايديا الأعداد الحقيقية التالية : $\sqrt[3]{3}$ و $\sqrt[4]{7}$ و $\sqrt[6]{10}$ و $\sqrt[12]{101}$

نتيجة :

ليكن $n \in \mathbb{N}^*$ ولتكن f دالة عددية

إذاكانت f قابلة للاشتقاق وموجبة على I ، فإن الدالة $\sqrt[n]{f}$ قابلة للاشتقاق على I ولدينا: $\left(\sqrt[n]{f}\right)' = \left(f^{\frac{1}{n}}\right)'$

$$= \frac{1}{n} \times f' \times f^{\frac{1}{n}-1}$$

مثال:

حدد الدالة المشتقة f' في الحالات التالية: دون تحديد $D_{f'}$

$f(x) = \sqrt[5]{x} - \sqrt[3]{x}$

$f(x) = 2x - \sqrt[3]{x^3 + 1}$

ملاحظات	المحتوى

I. العدد المشتق - الدالة المشتقة: Nombre dérivé- fonction dérivée

تعريف:

لتكن f دالة عددية معرفة على مجال مفتوح I و a عنصر من I.

نقول إن الدالة f قابلة للإشتقاق في a إذا وجد عدد حقيقي l بحيث $lim_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}=l$.

العدد l يسمى العدد المشتق للدالة f في a و نرمز له بالرمز $f'(a)$ وفي هذه الحالة منحنى الدالة f يقبل مماسا معادلته: $y=f'(a)(x-a)+f(a)$.

نقول إن الدالة f قابلة للإشتقاق على يمين a إذا وجد عدد حقيقي l بحيث $lim_{x\to a^+}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}=l$.

نرمز للعدد l بالرمز $f'_d(a)$ وفي هذه الحالة منحنى الدالة f يقبل نصف مماس معادلته:

$\begin{cases} y=f'(a)(x-a)+f(a) \\ x\geq a \end{cases}$. (نعرف بالمثل قابلية الاشتقاق على اليسار).

ملاحظة:

- ⊗ إذا كان $lim_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}=\infty$ فإن f غير قابلة للإشتقاق في a و $(\mathcal{C}_f)$ يقبل مماسا عموديا عند النقطة التي أفصولها a.
- ⊗ إذا كان $lim_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}=$ فإن $(\mathcal{C}_f)$ يقبل مماسا أفقيا عند النقطة التي أفصولها a.

مثال:

لندرس قابلية اشتقاق الدالة f المعرفة ب: $f(x)=x^2$ في النقطة 2.

لنعط قيمة مقربة للعدد $f(1,999)$.

تطبيق:

نعتبر الدالتين العدديتين المعرفتين بما يلي: $f(x)=x^3$ و $g(x)=\sqrt{x}$.

1) أدرس قابلية اشتقاق f في $x_0=-1$ ثم أول هندسيا النتيجة المحصل عليها.
2) أدرس قابلية اشتقاق f على يمين $x_0=0$ ثم أول هندسيا النتيجة المحصل عليها.

تمرين:

نعتبر الدالة **العددية** f المعرفة على $\mathbb{R}^+$ بمايلي: $f(x)=\begin{cases}\frac{\sqrt{x^2+1}-1}{x}, x\neq 0\\ 0\end{cases}$.

1) أدرس أتصال الدالة f في $x_0=0$.
2) أدرس قابلية اشتقاق f في $x_0=0$.

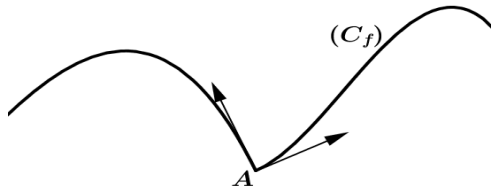
خاصية:

لتكن f دالة عددية معرفة على مجال مفتوح I و a عنصر من I.

الدالة f قابلة للإشتقاق في a إذا وفقط إذا كانت قابلة للإشتقاق على اليمين و على اليسار في a و $f'_d(a)=f_g{}'(a)$

هندسيا:

- ⊗ إذا كان $f'_d(a)\neq f_g{}'(a)$ فإن $(\mathcal{C}_f)$ يقبل نصفي مماس عند النقطة $A(a,f(a))$ وتسمى في هذه الحالة نقطة مزواة.



تطبيق:

نعتبر الدالة العددية f المعرفة على $[0,+\infty[$ بما يلي: $\begin{cases} f(x)=\sqrt{x}-1\,;\,0\le x<1 \\ f(x)=\frac{x^2-1}{4}\;;\,x\ge 1 \end{cases}$.

1. حدد $f(1)$ تحقق أن f متصلة في 1.
2. أدرس اشتقاق f في 1.

ملاحظة:

إذا كانت f قابلة للإشتقاق في a فهي متصلة في a والعكس غير صحيح.

مثال:

الدالة $f(x)=|x|$ متصلة في 0 وغير قابلة للإشتقاق في 0.

II. العمليات على الدوال القابلة للإشتقاق- رتابة دالة

خاصية:

- الدوال الحدودية و الدوال $x\longmapsto cos(x)$ و $x\longmapsto sin(x)$ دوال قابلة للإشتقاق على $\mathbb{R}$.
- الدوال الجذرية قابلة للإشتقاق على كل مجال ضمن مجال تعريفها.
- إذا كانت الدالة u قابلة للإشتقاق على مجال I وموجبة قطعا عليه فإن الدالة $\sqrt{u}$ قابلة للإشتقاق على I.

مشتقات بعض الدوال الإعتيادية:

الدالة f	الدالة f'	f قابلة للإشتقاق على I
$x\longmapsto k\quad(k\in\mathbb{R})$	0	$\mathbb{R}$
$x\longmapsto x^n\ (n\in\mathbb{N}^*)$	$x\longmapsto nx^{n-1}\ (n\in\mathbb{N}^*)$	$\mathbb{R}$
$x\longmapsto\frac{1}{x}$	$x\longmapsto-\frac{1}{x^2}$	$\mathbb{R}^*$
$x\longmapsto\sqrt{x}$	$x\longmapsto\frac{1}{2\sqrt{x}}$	$\mathbb{R}_+^*$
$x\longmapsto\cos(x)$	$x\longmapsto-sin(x)$	$\mathbb{R}$
$x\longmapsto sin(x)$	$x\longmapsto cos(x)$	$\mathbb{R}$
$x\longmapsto\tan(x)$	$x\longmapsto 1+ta\,n^2(x)=\frac{1}{cos^2(x)}$	$\mathbb{R}\setminus\left\{\frac{\pi}{2}+k\pi/k\in\mathbb{R}\right\}$

خاصية:

لتكن f و g دالتين قابلتين للإشتقاق على مجال I و λ عددا حقيقيا. لدينا:

- $(f+g)'=f'+g'$
- $(\lambda f)'=\lambda f'$
- $(f\times g)'=f'\times g+f\times g'$
- $(f^n)'=nf'\times f^{n-1}$
- $\left(\frac{f}{g}\right)'=\frac{f'\times g-f\times g'}{g^2}$ بحيث $g\neq 0$ على I.
- $\left(\frac{1}{f}\right)'=\frac{-f'}{f^2}$ بحيث $g\neq 0$ على I.

تطبيق:

1. حدد الدالة المشتقة للدالة f في الحالات التالية:

الحالة ❶ : $f(x) = \frac{2x}{1+x^2}$ و $I = \mathbb{R}$.

الحالة ❷ : $f(x) = \sqrt{x}\sin(x) + \cos(x)$ و $I = \mathbb{R}$.

الحالة ❸ : $f(x) = (x^2+1)^5$ و $I = \mathbb{R}$.

2. ضع جدول تغيرات f في الحالة الثانية ثم أستنتج أن $-1 \leq f(x) \leq 1$ $(\forall x \in \mathbb{R})$.

III. مشتقة مركب دالتين: Dérivée de la composée de deux fonctions

نشاط:

لتكن f و g دالتين معرفتين على $\mathbb{R}$ بما يلي $f(x) = \cos(x)$ و $g(x) = x^2 - 2x$.

1. أحسب $f'(x)$ و $g'(x)$ لكل x من $\mathbb{R}$.
2. أحسب $f'(x) \times g'(f(x))$ لكل x من $\mathbb{R}$.
3. نضع $h(x) = (gof)(x)$ لكل x من $\mathbb{R}$.

أ. حدد $h(x)$ ثم أحسب $h'(x)$ لكل x من $\mathbb{R}$.

ب. ماذا تستنتج؟

خاصية:

⊗ إذا كانت f معرفة في a و g معرفة في $f(a)$ فإن الدالة $g \circ f$ قابلة للإشتقاق في a و لدينا:
$(gof)'(a) = f'(a) \times g'(f(a)$

⊗ إذا كانت f معرفة على مجال I و g معرفة على مجال J بحيث $f(I) \subset J$ فإن الدالة $g \circ f$ قابلة للإشتقاق على المجال I و لدينا: $(gof)'(x) = f'(x) \times g'(f(x)$

❍ **مثال:** لنحدد مشتقة الدالة $x \longmapsto cos(\sqrt{x})$ على $I = \mathbb{R}_+^*$.

تطبيق:

أحسب مشتقة الدوال التالية: $x \longmapsto sin(x^2 - \frac{2}{3}x + 4)$ و $x \longmapsto cos(\frac{4}{x^2+4})$.

IV. مشتقة الدالة العكسية: Dérivée de la fonction réciproque

خاصية:

لتكن f تقابلا من مجال I نحو مجال J وليكن a عنصرا من I.
إذا كانت f قابلة للإشتقاق في a و $f'(a) \neq 0$ فإن f^{-1} قابلة للإشتقاق في $f(a)$ ولدينا :
$(f^{-1})'(f(a)) = \frac{1}{f'(a)}$

تطبيق:

نعتبر الدالة المعرفة بما يلي: $f(x) = x^3 + x$.

1. بين أن f تقابل من $\mathbb{R}$ نحو $\mathbb{R}$.
2. أحسب $f(1)$ ثم استنتج $(f^{-1})'(2)$.

لتكن f تقابلا من مجال I نحو مجال J بحيث مشتقتها لا تنعدم على J.

نعلم أن: $(fof^{-1})(x) = x$ $(\forall x \in J)$.

إذن : $(fof^{-1})'(x) = (f^{-1})'(x) \times f'(f^{-1}(x)) = 1$ $(\forall x \in J)$.

وبالتالي: $(f^{-1})'(x) = \frac{1}{f'(f^{-1}(x))}$ $(\forall x \in J)$

خاصية:

لتكن f تقابلا من مجال I نحو مجال J.

إذا كانت f قابلة للإشتقاق على I بحيث دالتها المشتقة لا تنعدم على I فإن f^{-1} قابلة للإشتقاق على I ولدينا:

$$(\forall x \in J)\ (f^{-1})'(x) = \frac{1}{f'(f^{-1}(x))}$$

نتائج:

⊗ ليكن $n \in \mathbb{N}^*$. الدالة $x \longmapsto \sqrt[n]{x}$ قابلة للإشتقاق على $]0,+\infty[$، ولدينا:

$$\left(\sqrt[n]{x}\right)' = \left(x^{\frac{1}{n}}\right)' = \frac{1}{n}x^{\frac{1}{n}-1} = \frac{1}{n\sqrt[n]{x^{n-1}}}.$$

⊗ إذا كانت f قابلة للإشتقاق على I وموجبة قطعا عليه فإن الدالة $x \longmapsto \sqrt[n]{f(x)}$ قبالة للإشتقاق على I

ولدينا: $\left(\sqrt[n]{f(x)}\right)' = \left(f(x)^{\frac{1}{n}}\right)' = \frac{1}{n}f(x)^{\frac{1}{n}-1} = \frac{1}{n\sqrt[n]{f(x)^{n-1}}}$

تطبيق:

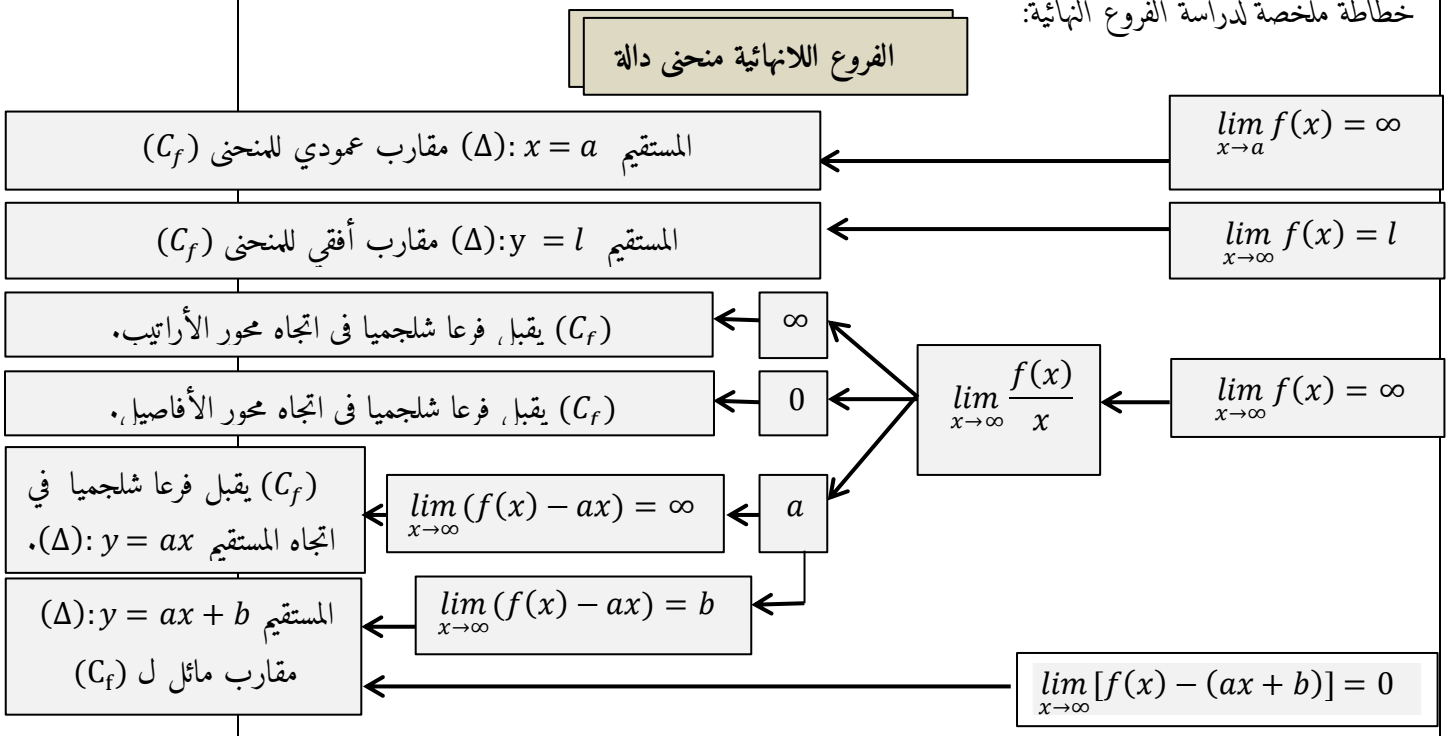
أحسب مشتقات الدوال التالية:

⊗ $f(x) = \sqrt[3]{x}$ ⊗ $f(x) = \sqrt[4]{x^3}$

⊗ $f(x) = \sqrt[3]{x^2+2x}$ ⊗ $f(x) = \sqrt[4]{1+cos^2(x)}$

V. الفروع اللانهائية: Les branches infinies

خطاطة ملخصة لدراسة الفروع النهائية:



تطبيق:

نعتبر الدالة f المعرفة بما يلي: $f(x) = \frac{x^2+x-1}{x+2}$

1. حدد $(\mathcal{D}_f)$ مجموعة تعريف الدالة f .
2. أحسب نهايات f عند محدات $\mathcal{D}_f$.
3. حدد a، b و c بحيث: $f(x) = ax + b + \frac{c}{x+2}$ لكل x من $\mathcal{D}_f$.
4. استنتج أن المستقيم ذو المعادلة: $(D): y = x - 1$ مقارب مائل ل (C_f) بجوار $+\infty$ و $-\infty$
5. أدرس الوضع النسبي بين (C_f) و المستقيم (D).

VI. تقعر منحنى دالة- نقط الانعطاف: Concavité d'une courbe-point d'inflexion

خاصية:

f قابلة للإشتقاق مرتين على مجال I .

$(\mathcal{C}_f)$ محدب $\Leftrightarrow f''(x) \geq 0 \ (\forall x \in I)$.

$(\mathcal{C}_f)$ مقعر $\Leftrightarrow f''(x) \leq 0 \ (\forall x \in I)$.

إذا كانت $f''(x)$ تنعدم وتغير إشارتها عند x_0 فإن النقطة $A(x_0, f(x_0))$ نقطة انعطاف ل$(\mathcal{C}_f)$.

إذا كانت $f'(x)$ تنعدم ولا تغير إشارتها عند x_0 فإن النقطة $A(x_0, f(x_0))$ نقطة انعطاف ل$(\mathcal{C}_f)$.

تطبيق:

نعتبر الدالة f المعرفة بما يلي: $f(x) = \dfrac{x^2 + x - 1}{x + 2}$

1) ضع جدول تغيرات الدالة f.

2) أدرس تقعر منحنى الدالة f.

VII. عناصر تماثل منحنى:

1) محور تماثل منحنى دالة عددية: Axe de symétrie d'une fonction numérique

خاصية:

لتك

ن f دالة عددية و $(\mathcal{D}_f)$ مجموعة تعريفها و a عددا حقيقيا.

يكون المستقيم (D) الذي معادلته $x = a$ محور تماثل للمنحنى (C_f) إذا وفقط إذا كان لكل x من D_f :

$2a - x \in D_f$ و $f(2a - x) = f(x)$.

ملاحظة:

في حالة $a = 0$ تكون f دالة زوجية و (C_f) متماثل بالنسبة لمحور الأراتيب.

تطبيق:

نعتبر f الدالة المعرفة ب: $f(x) = \sqrt{x^2 - 2x + 3}$

حدد مجموعة تعريف الدالة f: ثم بين أن (Δ): $x = 1$ محور تماثل للمنحنى (C_f).

2) مركز تماثل منحنى دالة عددية : Centre de symétrie d'une fonction

خاصية:

لتكن f دالة عددية و $(\mathcal{C}_f)$ منحناها في معلم متعامد ممنظم $(O; \vec{i}; \vec{j})$، و a و b عددين حقيقيين.

تكون النقطة $\Omega(a, b)$ مركز تماثل للمنحنى (C_f) إذا وفقط إذا كان لكل x من D_f : $2a - x \in D_f$ و $f(2a - x) + f(x) = 2b$

ملاحظة:

في حالة $a = b = 0$ تكون f دالة فردية و (C_f) متماثل بالنسبة لأصل المعلم.

تطبيق:

بين ان $\Omega(-2, -3)$ مركز تماثل لمنحنى الدالة f المعرفة ب $f(x) = \dfrac{x^2 + x - 1}{x + 2}$ ثم استنتج أنه يكفي دراسة الدالة f على المجال $]-2, +\infty[$ فقط.

تمرين: 1) بين أن الدالة المعرفة ب: $f(x)=\dfrac{x^2+x-1}{x+2}$ تقبل دالة عكسية من $[-1,+\infty[$ نحو مجال J يتم تحديده. 2) أنشئ (C_f) و $(C_{f^{-1}})$ و (D) في معلم متعامد ممنظم $(O,\vec{i},\vec{j})$.	

الأكاديمية الجهوية للتربية والتكوين جهة فاس مكناس - مديرية فاس الثانوية التأهيلية عبد الله الشفشاوني	درس نهاية متتالية عددية الرياضيات	المستوى: الثانية باكالوريا مسلك علوم شعبة العلوم التجريبية السنة الدراسية: 2020/2021
	درس: ❀❀نهاية متتالية عددية❀❀	**المدة الزمنية:10 ساعات**

القدرات المنتظرة

♠ استعمال المتتاليات الهندسية و المتتاليات الحسابية في دراسة أمثلة من متتاليات من الشكل: $u_{n+1} = au_n + b$ و $u_{n+1} = \dfrac{au_n + b}{cu_n + d}$ ومتتاليات ترجعية بسيطة؛

♠ إستعمال نهايات المتتاليات المرجعية ومصاديق التقارب لتحديد نهايات متتاليات عددية؛

♠ استعمال المتتاليات في حل مسائل متنوعة من مجالات مختلفة؛

♠ تحديد نهاية متتالية $(u_n)_n$ متقاربة من الشكل $u_{n+1} = f(u_n)$ حيث f دالة متصلة على مجال I و تحقق $f(I) \subset I$.

محتوى البرنامج

الفقرة	المدة المتوقعة
عموميات حول المتتاليات العددية ؛	ثلاث ساعات
نهاية متتالية عددية ؛	ساعة
مصاديق تقارب متتالية عددية ؛	ثلاث ساعات
نهايات متتاليات خاصة ؛	ثلاث ساعات

المكتسبات القبلية الضرورية

♠ *عموميات حول المتتاليات العددية؛*

♠ *العمليات على النهايات؛*

♠ *الاتصال و الإشتقاق.*

توجيهات تربوية

♠ *كل دراسة نظرية لمفهوم نهاية متتالية تعتبر خارج البرنامج؛*

♠ *اعتبارا لكون المتتالية العددية دالة عددية معرفة على مجموعة الأعداد الصحيحة الطبيعية، وانطلاقا من نهايات بعض الدوال المرجعية يتم، في المرحلة الأولى، قبول نهايات المتتاليات* $(n)_{n\geq 0}$ *و* $(n^2)_{n\geq 0}$ *و* $(n^3)_{n\geq 0}$ *و* $(\sqrt{n})_{n\geq 0}$ *و* $(n^p)_{n\geq 0}$ *و المتتاليات* $\left(\dfrac{1}{n}\right)_{n>0}$ *و* $\left(\dfrac{1}{n^2}\right)_{n>0}$ *و* $\left(\dfrac{1}{n^3}\right)_{n>0}$ *و* $\left(\dfrac{1}{\sqrt{n}}\right)_{n>0}$ *و* $\left(\dfrac{1}{n^p}\right)_{n>0}$ *حيث* p *عدد صحيح طبيعي أكبر من* 3 *، عندما يؤول* n *إلى* $+\infty$ *؛*

♠ *إذا كانت* $(v_n)_n$ *متتالية عددية تحقق:* $v_n \geq \alpha u_n$ *من اجل* $n \geq p$ *حيث* $(u_n)_n$ *متتالية نهايتها* $+\infty$ *و* α *عدد حقيقي موجب قطعا فإن* $\lim\limits_{n\to\infty} v_n = +\infty$ *؛*

♠ *إذا كانت* $(V_n)_n$ *متتالية عددية تحقق:* $|U_n - l| \leq \alpha u_n$ *من أجل* $n \geq p$ *حيث* $(u_n)_n$ *متتالية نهايتها* 0 *و* α *عدد حقيقي موجب قطعا فإن* $\lim\limits_{n\to\infty} v_n = l$ *؛*

♠ *تعتبر العمليات على النهايات المنتهية و النهايات اللامنتهية مقبولة وينبغي تعويد التلاميذ على الاستعمال الصحيح لها؛*

♠ *ينبغي العمل على توظيف الأداة المعلوماتية في هذا الفصل؛*

♠ *يتم قبول مصاديق التقارب بعد تقديمها اعتمادا على انسجام العمليات على النهايات مع الترتيب وفي وضعيات ملموسة ومتدرجة وذلك انطلاقا من حالات خاصة؛*

♠ *إذا كان* $W_n \leq U_n \leq V_n$ *و* $\lim\limits_{n\to+\infty} V_n = \lim\limits_{n\to+\infty} W_n = l$ *فإن* $\lim\limits_{n\to+\infty} U_n = l$

♠ *تتم معالجة مسائل تؤول إلى دراسة متتاليات ترجعية من الشكل:*

○ $u_{n+1} = au_n + b$

○ $u_{n+1}=\dfrac{au_n+b}{cu_n+d}$ ○ $u_{n+1}=f(u_n)$ حيث f دالة متصلة على مجال I وتحقق $f(I)\subset I$ ؛ ♠ تتم معالجة مسائل تؤدي لدراسة متتاليات من النوع: $(v_n=f(u_n))$ في حالات خاصة؛ ♠ تقبل الخاصيات التالية: ○ إذا كانت المتتالية من نوع $u_{n+1}=f(u_n)$ (حيث f دلة متصلة على مجال I وتحقق $f(I)\subset I$) متقاربة و نهايتها l فإن l حل للمعادلة $f(x)=x$ ؛ ○ إذا كانت المتتالية (u_n) متقاربة ونهايتها l فإن المتتالية $(v_n=f(u_n))$ متقاربة ونهايتها $f(l)$ ؛ ♠ تتم دراسة نهاية المتتالية $(a^n)_n$ (حيث $a\in\mathbb{R}^*$) ونهاية المتتالية $(n^\alpha)_n$ (حيث $\alpha\in\mathbb{Q}^*$) على ان تعتبر فيما بعد نهايتين اعتياديتين؛ تقدم دراسة الدوال على دراسة المتتاليات.	

I. تذكير

1) أنشطة تذكيرية

نشاط رقم 1:

1- نعتبر المتتالية العددية (u_n) المعرفة بما يلي : $u_0=\frac{2}{3}$ و $u_{n+1}=\frac{1}{4}u_n+\frac{3}{8}\ ;\forall n\in\mathbb{N}$

أ- أحسب u_1

ب- بين ان : $\frac{1}{2}\le u_n\le\frac{2}{3}\ ;\ (\forall n\in\mathbb{N})$.

2- لتكن (u_n) متتالية حسابية أساسها $r=10$ و حدها الأول $u_0=5$

أ- حدد العدد الصحيح الطبيعي n بحيث $u_n=125$

ب- أكتب u_n بدلالة n ، ثم حدد u_8 و u_1

ج- احسب المجموع التالي : $S_n=u_1+u_2+...+u_8$

3- لتكن (v_n) متتالية هندسية معرفة بمايلي : $v_2=64$ و $v_5=8$ أساسها q

أ- أحسب v_0 ثم حدد q ، ثم أكتب v_n بدلالة n

ب- احسب المجموع التالي : $S_n=\sum_{k=0}^{k=n}v_k=v_0+v_1+v_2+.....+v_n$

ج- هل 10 حد من حدود (u_n) ؟

نشاط رقم 2:

نعتبر المتتالية العددية (u_n) المعرفة بما يلي : $u_0=3$ و $u_{n+1}=3-\frac{9}{4u_n}\ ;\forall n\in\mathbb{N}$

1) بين ان : $u_n>\frac{3}{2}\ ;\ (\forall n\in\mathbb{N})$.

2) ادرس رتابة المتتالية (u_n) ثم استنتج انها محدودة .

3) نضع $v_n=\frac{2}{2u_n-3}\ ;\ (\forall n\in\mathbb{N})$

أ) بين ان (v_n) متتالية حسابية محددا أساسها وحدها الأول.

ب) احسب v_n ثم u_n بدلالة n.

4) نضع $S_n=v_1+v_2+.....+v_n$ ، احسب S_n بدلالة n .

نشاط رقم 3:

نعتبر المتتالية العددية (u_n) المعرفة بما يلي: $u_0=2$ و $u_{n+1}=\frac{7u_n+3}{2u_n+6}\ ;\forall n\in\mathbb{N}$

1) بين ان $u_n\ge\frac{3}{2}\ ;\ (\forall n\in\mathbb{N})$.

2) ادرس رتابة المتتالية (u_n) ثم استنتج انها محدودة .

3) نضع $v_n=\frac{2u_n-3}{u_n+1}\ ;\ (\forall n\in\mathbb{N})$

أ) بين ان (v_n) متتالية هندسية محددا أساسها وحدها الأول

ب) احسب v_n ثم u_n بدلالة n.

4) نضع $S_n=\sum_{k=3}^{k=n}v_k=v_3+v_4+v_5+.....+v_n$ ، احسب S_n بدلالة n .

5) أ) بين ان : $u_{n+1}-\frac{3}{2}\le\frac{4}{9}\left(u_n-\frac{3}{2}\right)\ ;\ (\forall n\in\mathbb{N})$.

ب) بين بالترجع ان : $u_n-\frac{3}{2}\le\frac{1}{2}\left(\frac{4}{9}\right)^n\ ;\ (\forall n\in\mathbb{N})$

الحل : أنظر جهة التمارين.

2) خلاصة

ليكن p عددا صحيحا طبيعيا و $(u_n)_{n\geq p}$ متتالية عددية

2 /1 متتالية مكبورة – متتالية مصغورة – متتالية محدودة:

متتالية مكبورة	متتالية مصغورة	متتالية محدودة
$(u_n)_{n\geq p}$ **مكبورة** إذا وجد عدد حقيقي M بحيث : $(\forall n\geq p)\ ;\ \boxed{u_n\leq M}$	$(u_n)_{n\geq p}$ **مصغورة** إذا وجد عدد حقيقي m بحيث : $(\forall n\geq p)\ ;\ \boxed{u_n\geq m}$	$(u_n)_{n\geq p}$ **محدودة** إذا وجد عددان حقيقيان m و M بحيث: $(\forall n\geq p)\ ;\ \boxed{m\leq u_n\leq M}$

2 /2 رتابة متتالية:

متتالية تزايدية	متتالية تناقصية	متتالية ثابتة
نقول أن المتتالية $(u_n)_{n\geq p}$ **تزايدية** إذا وفقط إذا كان: $(\forall n\geq p)\ ;\ \boxed{u_n\leq u_{n+1}}$	نقول أن المتتالية $(u_n)_{n\geq p}$ **تناقصية** إذا وفقط إذا كان: $(\forall n\geq p)\ ;\ \boxed{u_{n+1}\leq u_n}$	نقول أن المتتالية $(u_n)_{n\geq p}$ **ثابتة** إذا وفقط إذا كان: $(\forall n\geq p)\ ;\ \boxed{u_n=u_{n+1}}$
ملحوظة: إذا كانت $(u_n)_{n\geq p}$ تزايدية فان: $(u_n)_{n\geq p}$ مكبورة بحدها الأول ،يعني أن : $\boxed{u_n\geq u_p}$ حيث u_p هو الحد الأول للمتتالية $(u_n)_{n\geq p}$	ملحوظة: إذا كانت $(u_n)_{n\geq p}$ تناقصية فان $(u_n)_{n\geq p}$ مصغورة بحدها الأول ،يعني أن : $\boxed{u_n\leq u_p}$ حيث u_p هو الحد الأول للمتتالية $(u_n)_{n\geq p}$	

2 /3 المتتالية حسابية – المتتالية هندسية:

	لمتتالية حسابية	لمتتالية هندسية
تعريف	$(u_n)_{n\geq p}$ متتالية حسابية اذا وجد عدد حقيقي r بحيث : $(\forall n\geq p)\ ;\ \boxed{u_{n+1}=u_n+r}$ العدد r يسمى أساس المتتالية $(u_n)_{n\geq p}$ (r غير مرتبط بالعدد n)	$(u_n)_{n\geq p}$ متتالية هندسية اذا وجد عدد حقيقي q بحيث : $(\forall n\geq p)\ ;\ \boxed{u_{n+1}=q\times u_n}$ العدد q يسمى أساس المتتالية $(u_n)_{n\geq p}$ (q غير مرتبط بالعدد n)
الحد العام	اذا كانت $(u_n)_{n\geq p}$ متتالية حسابية اساسها r فان: $\boxed{u_n=u_p+(n-p)\times r}$ مثال : $u_n=u_0+nr$	اذا كانت $(u_n)_{n\geq p}$ متتالية هندسية أساسها q فان : $\boxed{u_n=u_p\times q^{n-p}}$ مثال : $u_n=u_0\times q^n$
مجموع حدود متتابعة	$S=u_p+u_{p+1}+u_{p+2}+\ldots+u_n$ $\boxed{S=\dfrac{(n-p+1)\times(u_p+u_n)}{2}}$	$S=u_p+u_{p+1}+u_{p+2}+\ldots+u_n$ $\boxed{S=u_p\times\dfrac{1-q^{n-p+1}}{1-q}}$

II. نهاية متتالية :

نشاط :

لتكن (U_n) المتتالية العددية المعرفة بمايلي: $(\forall n \in \mathbb{N})\ ;U_n = n^2$

المتتالية (U_n) هي الدالة العددية f المعرفة على $\mathbb{N}$ بمايلي : $f(n) = n^2$

بماأن $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$ فإنا نقبل أن $\lim\limits_{n\to+\infty} n^2 = +\infty$

استنتج بنفس الطريقة النهايات الأتية:

1- $\lim\limits_{n\to+\infty} n$; $\lim\limits_{n\to+\infty} n^3$; $\lim\limits_{n\to+\infty} \sqrt{n}$; $\lim\limits_{n\to+\infty} n^p$ حيث $(p \geq 3)$ و $p \in \mathbb{N}$

2- $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{1}{n}$; $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{1}{n^3}$; $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{1}{\sqrt{n}}$; $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{1}{n^p}$ حيث $(p \geq 3)$ و $p \in \mathbb{N}$

1) نهايات المتتاليات المرجعية: Limite de suites de références

خاصية:

ليكن p عنصرا من $\mathbb{N}$ بحيث $p \geq 3$ ، لدينا:

$\lim\limits_{n\to+\infty} \sqrt{n} = +\infty$	$\lim\limits_{n\to+\infty} n^p = +\infty$	$\lim\limits_{n\to+\infty} n^2 = +\infty$	$\lim\limits_{n\to+\infty} n = +\infty$
$\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{1}{\sqrt{n}} = 0$	$\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{1}{n^p} = 0$	$\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{1}{n^2} = 0$	$\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{1}{n} = 0$

مثال:

لنحسب $\lim\limits_{n\to+\infty} n^4 + 3n^2 + 1$

تطبيق:

حدد نهاية المتتالية (U_n) في الحالات التالية:

$U_n = \frac{n^2+n+1}{3n^3+n-6}$	$U_n = \frac{n}{\sqrt{n}+1}$	$U_n = \sqrt{n+1} - \sqrt{n}$	$U_n = 2n - \sqrt{n}$

2) تقارب متتالية عددية: Convergence d'une suite numérique

تعريف:

لتكن (U_n) متتالية عددية .

نقول إن (U_n) **متقاربة** إذا كانت نهايتها منتهية. أي إذا وجد عدد حقيقي l بحيث $\lim\limits_{n\to+\infty} U_n = l$.

نقول إن (U_n) **متباعدة** إذا كانت غير متقاربة. أي إذا كانت $\lim\limits_{n\to+\infty} U_n = +\infty$ أو $\lim\limits_{n\to+\infty} U_n = -\infty$ أو لا تقبل نهاية.

مثال:

- المتتالية (U_n) بحيث: $(\forall n \in \mathbb{N})\ ;U_n = \frac{n}{\sqrt{n}+1}$ متباعدة لأن $\lim\limits_{n\to+\infty} U_n = +\infty$.
- المتتالية (V_n) بحيث $(\forall n \in \mathbb{N})\ ;\ ;V_n = \sqrt{n+1} - \sqrt{n}$: متقاربة لأن $\lim\limits_{n\to+\infty} V_n = 0$.
- المتتالية (W_n) بحيث: $(\forall n \in \mathbb{N})\ ;W_n = (-1)^n$ متباعدة لأنه ليس لها نهاية.

ملحوظة :

خاصيات العمليات على النهايات هي نفس الخاصيات على الدوال العددية .

خاصية:

لتكن (U_n) متتالية عددية و l عددا حقيقيا.

$$\lim_{n\to+\infty}(U_n-l)=0 \Leftrightarrow \lim_{n\to+\infty}U_n=l$$

$$\lim_{n\to+\infty}|U_n-l|=0 \Leftrightarrow \lim_{n\to+\infty}U_n=l$$

مثال :

نعتبر (U_n) المعرفة ب: $U_n=\frac{(-1)^n}{n}+2$. بين أن: $\lim|U_n-2|=0$ ثم استنتج نهاية (U_n)

III. مصاديق التقارب: Critères de convergence

خاصية:

لتكن (U_n) و (V_n) متتاليتين عدديتين.

إذا كان $\begin{cases} U_n>V_n \\ \lim_{n\to+\infty}U_n=l \\ \lim_{n\to+\infty}V_n=l' \end{cases}$ فإن $l\geq l'$

مثال:

نعتبر (U_n) و (V_n) المعرفتين ب: $U_n=2+\frac{1}{n}$ و $V_n=2-\frac{1}{n}$

لدينا لكل n من $\mathbb{N}^*$: $U_n>V_n$

$$\lim_{n\to+\infty}U_n=2\ ;\ et\ \lim_{n\to+\infty}V_n=2$$

خاصية:

لتكن (U_n) و (V_n) و (W_n) ثلاث متتاليات عددية، و l عددا حقيقيا.

إذا كان $\begin{cases} V_n\leq U_n\leq W_n \\ \lim_{n\to+\infty}V_n=\lim_{n\to+\infty}W_n=l \end{cases}$ فإن: لمتتالية (U_n) متقاربة و $\lim_{n\to+\infty}U_n=l$

تطبيق:

نعتبر (U_n) المعرفة ب: $U_n=\frac{\cos(n)}{n^2+1}+2$;

1) بين أن $(\forall n\in\mathbb{N});\frac{-1}{n^2+1}+2\leq U_n\leq\frac{1}{n^2+1}+2$

2) استنتج نهاية (U_n).

3) بنفس الطريقة أوجد نهايات المتتاليات (V_n) و (W_n) المعرفة بمايلي: $V_n=\frac{\cos\left(n^2+\sqrt{n}-1\right)}{\sqrt{n+2}}$ و $W_n=\frac{1}{n(3-\sin(n+2))}$

خاصية:

لتكن (U_n) و (V_n) متتاليتين عدديتين، و l عددا حقيقيا.

إذا كان $\begin{cases} |U_n-l|\leq V_n \\ \lim_{n\to+\infty}V_n=0 \end{cases}$ فإن: $\lim_{n\to+\infty}U_n=l$

تطبيق:

نعتبر (U_n) المعرفة ب: $U_n = \frac{(-1)^n}{n} + 1$. بين أن: $\lim_{n\to+\infty} U_n = 1$

تطبيق :

تمرين 43 صفحة 95 من كتاب في رحاب الرياضيات

خاصية:

لتكن (U_n) و (V_n) متتاليتين عدديتين.

إذا كان $\begin{cases} U_n \le V_n \\ \lim_{n\to+\infty} U_n = +\infty \end{cases}$ فإن $\lim_{n\to+\infty} V_n = +\infty$

إذا كان $\begin{cases} U_n \le V_n \\ \lim_{n\to+\infty} V_n = -\infty \end{cases}$ فإن $\lim_{n\to+\infty} U_n = -\infty$

تطبيق:

نضع لكل n من $\mathbb{N}$: $U_n = \sin(n) + 3n$ و $V_n = \cos(n^2+3) - 5n + 1$

1) بين أن: $(\forall n \in \mathbb{N})\ U_n \ge -1 + 3n$ و $(\forall n \in \mathbb{N})\ V_n \le 2 - 5n$

2) استنتج نهاية (U_n) و (V_n)

تطبيق:

تمرين 35 صفحة 93 من كتاب في رحاب الرياضيات

خاصية: نقبل أن

كل متتالية تزايدية ومكبورة فهي متتالية متقاربة.

كل متتالية تناقصية ومصغورة فهي متتالية متقاربة.

تطبيق:

نعتبر المتتالية العددية (U_n) بحيث: $(\forall n \in \mathbb{N})$ $\begin{cases} U_0 = -1 \\ U_{n+1} = \frac{1}{2 - U_n} \end{cases}$

1) بين أن لكل n من $\mathbb{N}$: $U_n < 1$.

2) ادرس رتابة المتتالية (U_n)، ثم استنتج أنها متقاربة.

تطبيق:

تمرين 12 صفحة 91 من كتاب في رحاب الرياضيات

IV. نهايات متتاليات خاصة:

نشاط

نعتبر المتتالية العددية (U_n) بحيث: $(\forall n \in \mathbb{N})\ U_n = q^n$

-1 إذاكان $q = 1$ احسب U_2 ، U_{15} و U_{200} ، ماذاتلاحظ ؟

-2 إذاكان $q = 1{,}15$ احسب U_2 ، U_{15} و U_{200} ، ماذاتلاحظ ؟

-3 إذاكان $q = 0{,}15$ احسب U_2 ، U_{15} و U_{200} ، ماذاتلاحظ ؟

-4 إذاكان $q = -1$ احسب U_2 ، U_{15} و U_{200} ، ماذاتلاحظ ؟

1) نهاية المتتالية الهندسية q^n $\left(q\in\mathbb{R}^*\right)$:

خاصية: نقبل أن

ليكن q عددا حقيقيا.

ذا كان $q>1$ فإن $\lim\limits_{n\to+\infty} q^n=+\infty$.

إذا كان $-1<q<1$ فإن $\lim\limits_{n\to+\infty} q^n=0$.

إذا كان $q\le -1$ فإن المتتالية $\left(q^n\right)$ لانهاية لها.

إذاكان $q=1$ فإن $\lim\limits_{n\to+\infty} q^n=1$

مثال:

⊗ $\lim\limits_{n\to+\infty}(5)^n=+\infty$ لأن $5>1$

⊗ $\lim\limits_{n\to+\infty}(-0,5)^n=0$ لأن $-1<-0,5<1$

⊗ $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\frac{7}{8}\right)^n=0$ لأن $-1<\frac{7}{8}<1$

⊗ المتتالية $(-3)^n$ ليست لها نهاية .

تطبيق:

حدد نهاية المتتالية $\left(U_n\right)$ في الحالات التالية إن وجدت:

$U_n=\left(\frac{3}{8}\right)^n+\left(\frac{5}{4}\right)^n$	$U_n=\frac{5^n}{(-4)^n}$	$U_n=2^n-3^n$	$U_n=\frac{4^n-3^n}{4^n+3^n}$

تمرين:

نعتبر المتتالية العددية $\left(U_n\right)$ بحيث: $\left(\forall n\in\mathbb{N}\right)$ $\begin{cases} U_1=\frac{7}{3} \\ U_{n+1}=\frac{7U_n+3}{3U_n+7}\end{cases}$;

1) بين بالترجع أن: $U_n\ge 1$; $\left(\forall n\in\mathbb{N}^*\right)$.

2) بين أن المتتالية $\left(U_n\right)$ تناقصية ، ثم استنتج أنها متقاربة.

3) نعتبر المتتالية $\left(V_n\right)$ المعرفة بما يلي : $\left(\forall n\in\mathbb{N}^*\right)$; $V_n=\frac{U_n-1}{2U_n-1}$.

أ. بين أن $\left(V_n\right)$ متتالية هندسية ثم استنتج أن $\left(\forall n\in\mathbb{N}^*\right)$; $V_n=\left(\frac{2}{5}\right)^n$.

ب. حدد تعبير U_n بدلالة n ثم استنتج أن $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n=1$.

2) نهاية المتتالية n^α $\left(\alpha\in\mathbb{Q}^*\right)$:

خاصية:

⊗ ليكن $\alpha\in\mathbb{Q}^*$

⊗ إذا كان $\alpha>0$ فإن $\lim\limits_{n\to+\infty} n^\alpha=+\infty$.

⊗ إذا كان $\alpha<0$ فإن $\lim\limits_{n\to+\infty} n^\alpha=0$.

مثال:

✓ $\lim_{n\to+\infty} n^{\frac{5}{3}} = +\infty$ لأن $\frac{5}{3} > 0$.

✓ $\lim_{n\to+\infty} n^{-\frac{4}{3}} = 0$ لأن $-\frac{4}{3} < 0$

تطبيق:

حدد نهاية المتتالية (U_n) في الحالات التالية إن وجدت:

❶ $U_n = n^{\frac{5}{2}} - n^{\frac{4}{3}}$ ❷ $U_n = \sqrt{n} - \sqrt[4]{n}$

3) المتتالية $V_n = f(U_n)$:

خاصية:

لتكن f دالة عددية متصلة في l و (U_n) متتالية متقاربة ونهايتها l .

المتتالية (V_n) بحيث $V_n = f(U_n)$ متتالية متقاربة ونهايتها $f(l)$.

مثال:

لنحدد نهاية المتتالية (V_n) المعرفة ب: $(\forall n \in \mathbb{N}\ ); V_n = \cos\left(\frac{\pi n + 2}{3n - 1}\right)$

تطبيق:

حدد نهايات المتتاليات المعرفة بما يلي: $U_n = \sin\left(\frac{1 - n^2\pi}{n + 6n^2}\right)$ و $V_n = \sqrt{\frac{16n^2 - 3n + 1}{2n^2 + 1}}$

4) المتتالية $U_{n+1} = f(U_n)$:

خاصية:

لتكن f دالة عددية و I مجال ضمن D_f ولتكن $(u_n)_n$ متتالية بحيث: $\begin{cases} u_0 \in IR \\ u_{n+1} = f(u_n); n \in IN \end{cases}$.

إذا كان: f متصلة على I و $f(I) \subset I$ و $u_0 \in I$ و المتتالية $(u_n)_n$ متتالية متقاربة ونهايتها l.

فإن: $f(l) = l$.

تطبيق:

نعتبر المتتالية العددية $(u_n)_n$ المعرفة بما يلي: $\begin{cases} u_0 = \frac{4}{9} \\ u_{n+1} = 4u_n\sqrt{u_n} - 3u_n^{\,2}; \forall n \in \mathbb{N} \end{cases}$

ونعتبر الدالة العددية f المعرفة على $\mathbb{R}^+$ بما يلي: $f(x) = 4x\sqrt{x} - 3x^2$.

1) بين أن الدالة f تزايدية على المجال $I = [0;1]$.
2) استنتج أن: $f(I) \subset I$.
3) بين أن $\forall n \in \mathbb{N}; \frac{4}{9} \le u_n \le 1$
4) بين أن المتتالية $(u_n)_n$ تزايدية
5) استنتج أن $(u_n)_n$ متقاربة ثم احسب نهايتها.

تطبيق: تمرين 46 صفحة 95 من كتاب في رحاب الرياضيات

الأكاديمية الجهوية للتربية والتكوين جهة فاس مكناس مديرية فاس الثانوية التأهيلية عبد الله الشفشاوني	درس الدوال الأصلية الرياضيات	المستوى: الثانية باكالوريا مسلك علوم شعبة العلوم التجريبية السنة الدراسية: 2020/2021

الثانية باك علوم تجريبية	❀❀ *الدوال الأصلية* ❀❀	السنة الدراسية: 2020 – 2021
المدة الزمنية: ثلاث ساعات		
القدرات المنتظرة	♠ تحديد الدوال الأصلية للدوال الاعتيادية. ♠ استعمال صيغ الاشتقاق لتحديد الدوال الأصلية لدالة على مجال.	
محتوى البرنامج	الفقرة	المدة المتوقعة
	⊗ *تعريف وأمثلة؛*	⊗ ساعة ونصف
	⊗ *خاصيات؛*	
	⊗ *جدول الدوال الأصلية للدوال الاعتيادية.*	⊗ ساعة ونصف
التوجيهات التربوية	♠ تحدد الدوال الأصلية للدوال الاعتيادية انطلاقا من القراءة العكسية لجدول مشتقات هذه الدوال.	
المكتسبات القبلية	♠ الاشتقاق؛ ♠ الإتصال.	
الامتدادات	♠ الدوال اللوغاريتمية؛ ♠ التكامل؛ المعادلات التفاضلية.	

I. تعريف و أمثلة

نشاط activité

لتكن F و f دالتين معرفتين على $\mathbb{R}$ بمايلي: $f(x)=5x^3-3x+2$ و $F(x)=\frac{5}{4}x^4-\frac{3}{2}x^2+2x+7$

1) تحقق أن F قابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}$ وأن لكل x من $\mathbb{R}$: $F'(x)=f(x)$.

الحل:

لدينا F دالة حدودية ومنه F قابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}$

ولدينا :
$$F'(x)=\left(\frac{5}{4}x^4-\frac{3}{2}x^2+2x+7\right)'$$
$$F'(x)=\cancel{4}\times\frac{5}{\cancel{4}}x^3-\cancel{2}\times\frac{3}{\cancel{2}}x^1+2$$
$$F'(x)=5x^3-3x+2$$
$$F'(x)=f(x)$$

نقول في هذه الحالة أن الدالة F دالة **أصلية** ل f على $\mathbb{R}$.

On dit que F est une fonction **primitive** de f sur $\mathbb{R}$

2) لتكن G الدالة العددية المعرفة على $\mathbb{R}$ بمايلي: $G(x)=\frac{5}{4}x^4-\frac{3}{2}x^2+2x-4$

بين أن G دالة أصلية ل f على $\mathbb{R}$. ماذاتستنتج؟

الحل:

لدينا G دالة حدودية ومنه G قابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}$

ولدينا :
$$G'(x)=\left(\frac{5}{4}x^4-\frac{3}{2}x^2+2x-4\right)'$$
$$G'(x)=5x^3-3x+2$$
$$G'(x)=f(x)$$

إذن G دالة أصلية ل f على $\mathbb{R}$

نستنتج أن للدالة f مالانهاية له من الدوال الأصلية

تعريف : Définition

لتكن f دالة عددية معرفة على مجال I .

نقول أن F دالة أصلية للدالة f على I ، إذا كانت F **قابلة للاشتقاق** على I و $F'(x)=f(x)$ $(\forall x\in I)$

خاصيات

خاصية ①:

إذاكانت F دالة أصلية للدالة f على I.

فإن كل الدوال المعرفة ب: $x\mapsto F(x)+c$ بحيث c عدد حقيقي ، هي أيضا دوال الأصلية للدالة f على I

خاصية ②:

لتكن f تقبل دالة أصلية على مجال I و $x_0\in I$ و $y_0\in\mathbb{R}$. توجد دالة أصلية وحيدة F تحقق: $F(x_0)=y_0$

أمثلة

- الدالة $F:x\mapsto 5x+4$ دالة قابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}$ و لدينا $F':x\mapsto 5$ إذن F أصلية للدالة $f:x\mapsto 5$.
- الدالة $F:x\mapsto\frac{1}{3}x^3-\frac{1}{2}x^2-\sqrt{7}$ و لدينا $F':x\mapsto x^2-x$ إذن F دالة أصلية على $\mathbb{R}$ للدالة $f:x\mapsto x^2-x$.

نلاحظ أن $(c)'=0$ إذن الدالة الأصلية: ل $x\mapsto 0$ هي $x\mapsto c$ حيث $c\in\mathbb{R}$

و أن $(ax+c)'=a$ إذن الدالة الأصلية: ل $(a\in\mathbb{R})$ $x\mapsto a$ هي $x\mapsto ax+c$

و أن $(x^2)'=2x$ يعني أن $\left(\frac{x^2}{2}\right)'=x$ إذن الدالة الأصلية: ل $x\mapsto x$ هي $x\mapsto \frac{x^2}{2}+c$

و أن $(x^3)'=3x$ يعني أن $\left(\frac{x^3}{3}\right)'=x^2$ إذن الدالة الأصلية: ل $x\mapsto x^2$ هي $x\mapsto \frac{x^3}{3}+c$

وبصفة عامة الدالة الأصلية ل $(n\in\mathbb{N}^*)$ $x\mapsto x^n$ هي $x\mapsto \frac{1}{n+1}x^{n+1}+c$

تطبيق :

نعتبر الدالتين f و F المعرفتين على $\mathbb{R}$ بما يلي: $f(x)=x^4-2x^3+4$ و $F(x)=\frac{1}{5}x^5-\frac{1}{2}x^4+4x$

1) حدد دالة أصلية F للدالة f على $\mathbb{R}$.

2) حدد الدالة الأصلية G للدالة f على $\mathbb{R}$ بحيث: $G(1)=4$.

الحل : أنظر جمة التمارين

خاصية ③: نقبل أن

كل دالة **متصلة** على مجال I **تقبل** دالة أصلية على I .

تطبيق:

بين أن الدالة $x\mapsto x\sqrt{x+1}+\cos(x)$ تقبل دالة أصلية على $I=[1,+\infty[$

الحل : أنظر جمة التمارين

II. جدول الدوال الأصلية الاعتيادية:

انطلاقا من القراءة العكسية لجدول مشتقات الدوال الإعتيادية نحصل على الجدول الاتي

الدالة	الدوال الأصلية
$x\mapsto 0$	$x\mapsto c$
$x\mapsto a$ $(a\in\mathbb{R})$	$x\mapsto ax+c$
$x\mapsto x$	$x\mapsto \frac{x^2}{2}+c$
$x\mapsto x^n$ $(n\in\mathbb{N}^*)$	$x\mapsto \frac{1}{n+1}x^{n+1}+c$
$x\mapsto x^r$ $(r\in\mathbb{Q}^*\setminus\{-1\})$	$x\mapsto \frac{1}{r+1}x^{r+1}+c$
$x\mapsto -\frac{1}{x^2}$	$x\mapsto \frac{1}{x}+c$
$x\mapsto \frac{1}{2\sqrt{x}}$	$x\mapsto \sqrt{x}+c$
$x\mapsto \frac{1}{x^n}$ $(n\in\mathbb{N}^*)$	$x\mapsto \frac{1}{-n+1}x^{-n+1}+c$
$x\mapsto \cos x$	$x\mapsto \sin x+c$
$x\mapsto \sin x$	$x\mapsto -\cos x+c$
$x\mapsto 1+(\tan x)^2$	$x\mapsto \tan x+c$

انطلاقا من القراءة العكسية للعمليات عاى الدوال المشتقة نحصل على الجدول الاتي

الدالة f	دالة أصلية F
$U'\times U^r \ \left(r\in\mathbb{Q}^*\setminus\{-1\}\right)$	$\frac{1}{r+1}U^{r+1}+c$
$-\frac{U'}{U^2}$	$\frac{1}{U}+c$
$\frac{U'}{2\sqrt{U}}$	$\sqrt{U}+c$
$U'+V'$	$U+V+c$
$U'V+UV'$	$U\times V+c$
$\frac{U'V-UV'}{V^2}$	$\frac{U}{V}+c$

تطبيق 1 : حدد الدوال الأصلية للدوال التالية:

$f_1(x)=2x^5-3x^2-1$	$f_2(x)=\frac{1}{x^4}+\frac{2}{\sqrt[3]{x}}-\sqrt[4]{x^3}$	$f_3(x)=(x+1)^{2021}$	$f_4(x)=(3x^2-1)(x^3-x)^2$
$f_5(x)=x(x^2-1)^{21}$	$f_6(x)=\frac{x}{(x^2+1)^2}$	$f_7(x)=\frac{2x}{\sqrt{x^2+1}}$	$f_8(x)=\frac{x}{\sqrt{3x^2+6x+1}}$
$f_9(x)=\sqrt{x+2}$	$f_{10}(x)=(2x+1)\sqrt{2x+1}$	$f_{11}(x)=\cos(3x+1)+\sin(5-2x)$	

الحل : أنظر جمة التمارين

تطبيق 2 :

لتكن f الدالة العددية المعرفة على $[0;+\infty[$ بمايلي: $f(x)=\frac{x^2+2x}{(x+1)^2}$

1- حدد العددين a و b بحيث : $\left(\forall x\in[0;+\infty[\right);\ f(x)=a+\frac{b}{(x+1)^2}$

2- استنتج الدالة الأصلية F للدالة f التي تحقق: $F(1)=\frac{5}{2}$.

الحل : أنظر جمة التمارين

À Retenir

Type 1		Type 2	
f	$\Rightarrow$ F	f	$\Rightarrow$ F
x^r	$\frac{x^{r+1}}{r+1}+c$	$U'\times U^r$	$\frac{U^{r+1}}{r+1}+c$
$\frac{-1}{x^2}$	$\frac{1}{x}+c$	$\frac{-U'}{U^2}$	$\frac{1}{U}+c$
$\frac{1}{2\sqrt{x}}$	$\sqrt{x}$	$\frac{U'}{2\sqrt{U}}$	$\sqrt{U}$

TYPE 1 :

1- Si $f(x)=x^r$ alors $F(x)=\dfrac{x^{r+1}}{r+1}+c$

Exemples :

$f(x)=x^3$ $\quad f(x)=-3x^6$ $\quad f(x)=\dfrac{x^3}{2}=\dfrac{1}{2}\times x^3$

$F(x)=\dfrac{x^4}{4}$ $\quad F(x)=\dfrac{-3x^7}{7}$ $\quad F(x)=\dfrac{1}{2}\times\dfrac{x^4}{4}=\dfrac{x^4}{8}$

2- Si $f(x)=-\dfrac{1}{x^2}$ alors $F(x)=\dfrac{1}{x}+c$

Exemples :

on a $\quad f(x)=\dfrac{-3}{x^2}$; $f(x)=\dfrac{4}{x^2}$; $f(x)=\dfrac{\sqrt{2}}{x^2}$

$=3\times\dfrac{-1}{x^2}$ $\quad =-4\times\dfrac{-1}{x^2}$ $\quad =-\sqrt{2}\times\dfrac{-1}{x^2}$

Alors $\quad F(x)=3\times\dfrac{1}{x}$; $F(x)=-4\times\dfrac{1}{x}$; $F(x)=-\sqrt{2}\times\dfrac{1}{x}$

$F(x)=\dfrac{3}{x}$ $\quad F(x)=\dfrac{-4}{x}$ $\quad F(x)=\dfrac{-\sqrt{2}}{x}$

3- Si $f(x)=\dfrac{1}{2\sqrt{x}}$ alors $F(x)=\sqrt{x}+c$

Exemples :

on a $\quad f(x)=\dfrac{1}{\sqrt{x}}$; $f(x)=\dfrac{4}{\sqrt{x}}$; $f(x)=\dfrac{-3}{\sqrt{x}}$

$=2\times\dfrac{1}{2\sqrt{x}}$ $\quad =4\times2\times\dfrac{1}{2\sqrt{x}}$ $\quad =-3\times2\times\dfrac{1}{2\sqrt{x}}$

Alors $\quad F(x)=2\times\sqrt{x}$; $F(x)=8\times\sqrt{x}$; $F(x)=-6\times\sqrt{x}$

$F(x)=2\sqrt{x}$ $\quad F(x)=8\sqrt{x}$ $\quad F(x)=-6\sqrt{x}$

4- Divers :

on a $\quad f(x)=\sqrt{x}$; $f(x)=\dfrac{1}{x^3}$; $f(x)=\sqrt[3]{x^2}$

$=x^{\frac{1}{2}}$ $\quad =x^{-3}$ $\quad =x^{\frac{2}{3}}$

Alors $\quad F(x)=\dfrac{x^{\frac{1}{2}+1}}{\frac{1}{2}+1}$; $F(x)=\dfrac{x^{-3+1}}{-3+1}$; $F(x)=\dfrac{x^{\frac{2}{3}+1}}{\frac{2}{3}+1}$

$F(x)=\dfrac{x^{-2}}{-2}$

$F(x)=\dfrac{2x^{\frac{3}{2}}}{3}$ $\quad F(x)=-\dfrac{1}{2x^2}$ $\quad F(x)=\dfrac{3x^{\frac{5}{3}}}{5}$

المحتوى	ملاحظات

I. دالة اللوغاريتم النيبري:

1) تعريف وخاصيات:

تعريف:

نسمي دالة اللوغاريتم النيبري الدالة الأصلية للدالة $x \to \frac{1}{x}$ على $]0;+\infty[$ والتي تنعدم في 1. نرمز لها ب : ln أو Log.

بتعبير اخر:

$f(x) = ln(x)$ يعني أن: $\begin{cases} x > 0 \\ f(1) = 0 \\ f'(x) = \frac{1}{x} \end{cases}$

تطبيق:

حدد مجموعة تعريف الدوال التالية :

$f(x) = ln(3x+4)$	$g(x) = ln(\frac{x-1}{x+2})$
$h(x) = ln(x^2+x)$	$l(x) = ln(\|x-1\|)$

خاصية:

- ⊗ الدالة ln متصلة و قابلة للإشتقاق على المجال $]0;+\infty[$.
- ⊗ الدالة ln تزايدية قطعا على $]0;+\infty[$: $\forall(x,y) \in \mathbb{R}_*^{+2} : \quad ln(x) > ln(y) \Leftrightarrow x > y$
- ⊗ $\forall(x,y) \in \mathbb{R}_*^{+2} : \quad ln(x) = ln(y) \Leftrightarrow x = y$

تطبيق:

حل في $\mathbb{R}$ مايلي:

① $ln(x-1) = ln(2-x)$	② $ln(x^2-2x) = 0$
③ $ln(2x-1) \geq ln(x)$	④ $ln(x^2-3x+3) < 0$

خاصية:

إشارة الدالة ln:

- ⊗ $ln(x) > 0 \Leftrightarrow x > 1$.
- ⊗ $ln(x) < 0 \Leftrightarrow 0 < x < 1$.

تطبيق:

حدد مجموعة تعريف الدوال التالية :

$f(x) = ln(ln(x))$	$g(x) = \sqrt{(x-2)\ln(x)}$

خاصية:

لكل a و b من $]0;+\infty[$ ولكل r من $\mathbb{Q}$، لدينا :

- ⊗ $ln(ab) = ln(a) + ln(b)$.
- ⊗ $ln\left(\frac{a}{b}\right) = ln(a) - ln(b)$.
- ⊗ $ln\left(\frac{1}{a}\right) = -ln(a)$.
- ⊗ $ln(a^r) = r\, ln(a)$.

ذ. لطرش عبد الكبير

مثال:

- $ln(\sqrt{8}) = \frac{1}{2}ln(8) = \frac{1}{2}ln(2^3) = \frac{3}{2}ln(2)$.
- $ln\left(\frac{3}{4}\right) + ln\left(\frac{4}{3}\right) = ln(3) - ln(4) + ln(4) - ln(3) = 0$.

تطبيق:

1. بسط العدد : $A = ln8 + ln\sqrt[3]{2} - ln16$
2. إختزل العدد: $B = ln\left(\sqrt{2+\sqrt{2}}\right) + ln\left(\sqrt{2-\sqrt{2}}\right)$
3. حل في $\mathbb{R}$ المعادلة التالية: $(E):\ ln(x^2-1) + 2ln(2) = ln(4x-1)$.

خاصية:

المعادلة $ln(x) = 1$ تقبل حلا وحيدا في $]0;+\infty[$ نرمز له بالرمز e.

ملاحظة:

لكل عدد جذري k لدينا : $ln(e^k) = k$

مثال:

- لنحل المعادلة: $4ln(x) = 3$.

تطبيق:

1. حل في $\mathbb{R}$: $x^2 - 4x + 3 = 0$
2. استنتج حلول المعادلة: $ln(x)^2 - 4ln(x) + 3 = 0$

2) نهايات اعتيادية:

خاصية:

- $lim_{x\to+\infty} lnx = +\infty$.
- $lim_{x\to+\infty} \frac{lnx}{x} = 0$.
- $lim_{x\to+\infty} \frac{lnx}{x^n} = 0 \quad (n\epsilon IN^*)$.
- $lim_{x\to0^+} lnx = -\infty$.
- $lim_{x\to0^+} xlnx = 0$.
- $lim_{x\to0^+} x^n\ lnx = 0\ (n\epsilon IN^*)$.

برهان: لنبين أن $lim_{x\to+\infty} \frac{lnx}{x} = 0$.

أمثلة:

- لنحسب النهاية $lim_{x\to+\infty} x - lnx$.

$lim_{x\to+\infty} x - lnx = lim_{x\to+\infty} x(1 - \frac{lnx}{x}) = +\infty$ لأن: $lim_{x\to+\infty} 1 - \frac{lnx}{x} = 1$.

تطبيق:

احسب النهايات التالية :

$\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{lnx+4}{x^2}$	$\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{lnx}{\sqrt{x}}$	$\lim\limits_{x\to+\infty} lnx - \sqrt{x}$
$\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{ln(x^2+1)}{x^3}$	$\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{ln(x^2+1)}{x}$	$\lim\limits_{x\to0^+} ln(\frac{x}{x+1})$

ذ. لطرش عبد الكبير

$$\lim_{x\to 3^-} ln(3-x)$$

3) دراسة الدالة ln :

- **جدول تغيرات الدالة ln :**

x	0	$+\infty$
$ln(x)$	$-\infty$ ↗	$+\infty$

- **الفروع اللانهائية:**

لدينا: $lim_{x\to 0^+} ln(x) = -\infty$ ، إذن: منحنى الدالة ln يقبل مقاربا عموديا معادلته $x = 0$

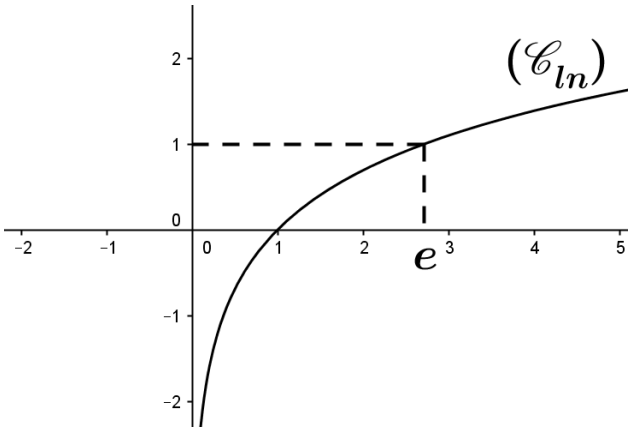
لدينا: $\begin{cases} lim_{x\to+\infty} ln(x) = +\infty \\ lim_{x\to+\infty} \frac{ln(x)}{x} = 0 \end{cases}$ ، إذن: C_{ln} يقبل محور الأفاصيل كاتجاه مقارب جوار $+\infty$.

- **دراسة التقعر :**

لدينا : $\forall x > 0 : \quad (ln(x))'' = ((lnx)')' = (\frac{1}{x})' = \frac{-1}{x^2} < 0$

إذن: منحنى الدالة ln مقعر.

- **منحنى الدالة ln :**



4) مشتقة الدالة ln :

إذا كانت u دالة قابلة للإشتقاق على مجال I وموجبة قطعا عليه ،فإن الدالة $f: x \longmapsto \ln(u(x))$ قابلة للإشتقاق على المجال I،ولدينا: $\forall x\epsilon I : \ f'(x) = \frac{U'(x)}{U(x)}$.

خاصية:

إذا كانت u دالة قابلة للإشتقاق على مجال I وموجبة قطعا عليه ،فإن الدالة $f: x \longmapsto \ln(u(x))$ قابلة للإشتقاق على المجال I،ولدينا: $\forall x\epsilon I : \ f'(x) = \frac{U'(x)}{U(x)}$.

بصفة عامة:

إذا كانت u دالة قابلة للإشتقاق على مجال I وغير منعدمة عليه ،فإن الدالة $f: x \longmapsto \ln(|u(x)|)$ قابلة للإشتقاق على المجال I،ولدينا: $\forall x\epsilon I : \ f'(x) = \frac{U'(x)}{U(x)}$.

مثال:

ذ. لطرش عبد الكبير

○ لنحسب مشتقة الدالة $f: x \longmapsto \ln(lnx)$.

لدينا $x \longmapsto \ln(x)$ قابلة للإشتقاق على $]1,+\infty[$ و $lnx > 0$ $(\forall x > 1)$.

إذن $f: x \longmapsto \ln(lnx)$ قابلة للإشتقاق على $]1,+\infty[$،ولدينا:

تطبيق:

أحسب مشتقة الدالة f في الحالات التالية:

①	$f(x) = ln(1-3x) - ln(x^2+1)$	$I = \left]-\infty, -\frac{1}{3}\right[$
②	$f(x) = ln\left(\sqrt{x^2+4}\right)$	$I = \mathbb{R}$

تطبيق:

بتوظيف العدد المشتق، أحسب النهايات التالية:

$\lim\limits_{x\to 0} \frac{\ln(x+1)}{x}$	$\lim\limits_{x\to 1} \frac{\ln(x)}{x-1}$	$\lim\limits_{x\to 3} \frac{\ln(\frac{x}{3})}{x-3}$

خاصية:

⊗ $lim_{x\to 0} \frac{\ln(x+1)}{x} = 1$.

⊗ $lim_{x\to 1} \frac{\ln(x)}{x-1} = 1$.

لازمة:

لتكن u دالة قابلة للإشتقاق على مجال I ولا تنعدم عليه.

الدوال الأصلية للدالة $x \to \frac{u'(x)}{u(x)}$ على I هي الدوال $x \to ln|u(x)| + c$ حيث: $c \in \mathbb{R}$.

○ لنحدد الدوال الأصلية للدالة $f: x \longmapsto \frac{x}{x^2+4} - \frac{1}{4x+3}$ على المجال $I = \left]-\frac{3}{4}, +\infty\right[$

لدينا: $f(x) = \frac{1}{2} \times \frac{(x^2+4)'}{x^2+4} - \frac{1}{4} \times \frac{(4x+3)'}{4x+3}$.

إذن الدوال الأصلية للدالة f على المجال $I = \left]-\frac{3}{4}, +\infty\right[$: $x \longmapsto \frac{1}{2}\ln(x^2+4) - \frac{1}{4}\ln(4x+3) + c$.

تطبيق:

حدد الدوال الأصلية للدوال التالية :

$f(x) = \frac{1}{4x-2} + \frac{1}{3x+2}$	$g(x) = \frac{2x^3+2}{x^4+4x+3}$	$h(x) = \frac{1}{xln(x)}$

II. دالة اللوغاريتم للأساس a $(a > 0$ و $a \neq 1)$

1) تعريف وخاصيات:

تعريف:

ليكن a عددا حقيقيا موجبا قطعا حيث $a \neq 1$.

الدالة $x \to \frac{ln(x)}{ln(a)}$ تسمى دالة اللوغاريتم للأساس a، نرمز لها ب : log_a ونكتب: $log_a(x) = \frac{ln(x)}{ln(a)}$.

نتائج:

$log_a(1) = 0$; $log_a(a) = 1$

خاصية:

لكل x و y من $]0;+\infty[$ ولكل a من $\mathbb{R}_+^* \setminus \{1\}$ لدينا :

⊗ $log_a(xy) = log_a(x) + log_a(y)$

ذ. لطرش عبد الكبير

⊗ $log_a\left(\frac{1}{y}\right) = -log_a(y)$.

⊗ $log_a\left(\frac{x}{y}\right) = log_a(x) - log_a(y)$.

⊗ $\forall r \epsilon \mathbb{Q} \ : \ log_a(x^r) = r log_a(x)$.

برهان:

$$log_a(xy) = \frac{ln(xy)}{ln(a)} = \frac{ln(x)+ln(y)}{ln(a)}$$
$$= \frac{ln(x)}{ln(a)} + \frac{ln(y)}{ln(a)} = log_a(x) + log_a(y)$$

" للبرهان على الخاصيات الأخرى نستعمل الخاصيات الجبرية للدالة ln "

تطبيق:

احسب ما يلي : $log_2(16) + log_2\left(\frac{1}{32}\right) - log_3(27)$

2) دراسة دالة اللوغاريتم للأساس a:

خاصية:

ليكن a من $\mathbb{R}_+^* \setminus \{1\}$ لدينا:

⊗ إذا كان $a > 1$ فإن log_a تزايدية قطعا على $]0,+\infty[$.

⊗ إذا كان $0 < a < 1$ فإن log_a تناقصية قطعا على $]0,+\infty[$.

برهان:

الدالة log_a قابلة للإشتقاق على $]0;+\infty[$ و لدينا:

$$(\forall x > 0): \ (log_a)'(x) = \left(\frac{ln(x)}{ln(a)}\right)' = \frac{1}{ln(a)} \times \frac{1}{x}$$

$0 < a < 1$	$a > 1$
x: 0 ↗ $+\infty$; $log_a(x)$: $-\infty$ ↗ $+\infty$	x: 0 ↘ $+\infty$; $log_a(x)$: $+\infty$ ↘ $-\infty$

تطبيق:

حل في $\mathbb{R}$ المتراجحات التالية:

① $log_3(2-x) \leq log_3(x+4)$	② $log_{\frac{1}{2}}(2-x) \leq log_{\frac{1}{2}}(x+4)$

III. دالة اللوغاريتم العشري

تعريف:

دالة اللوغاريتم للأساس 10 تسمى **دالة اللوغاريتم العشري** ونرمز لها ب: log_{10} أو log.

أمثلة:

- $log(10) = 1$
- $log(0,001) = 3$

تطبيق:

بسط العدد التالي : $log(1000) - log(0,0001) + log(\frac{1}{10000})$.

ذ. لطرش عبد الكبير

الأكاديمية الجهوية للتربية والتكوين جهة فاس مكناس - مديرية فاس الثانوية التأهيلية عبد الله الشفشاوني	❀❀ الأعداد العقدية (الجزء الأول) ❀❀	المستوى : الثانية باكالوريا مسلك علوم شعبة العلوم التجريبية السنة الدراسية : 2020/2021

المدة الزمنية: عشر ساعات

القدرات المنتظرة	♠ التمكن من الحساب على الأعداد العقدية؛ ♠ الإنتقال من الكتابة الجبرية إلى الكتابة المثلثية لعدد عقدي و العكس؛ ♠ تطبيق الأعداد العقدية في حل مسائل هندسية(الإستقامية التعامد،...)؛ ♠ التعبير عقديا عن الإزاحة و التحاكي.	
محتوى البرنامج	**الفقرة**	**المدة المتوقعة**
	⊗ ***مجموعة الأعداد العقدية*** ● المجموعة $\mathbb{C}$- الكتابة الجبرية؛ ● العمليات في $\mathbb{C}$؛ ● مرافق عدد عقدي؛ ● معيار عدد عقدي؛	⊗ أربع ساعات
	⊗ ***التمثيل الهندسي لعدد عقدي*** ● تعاريف؛ ● إستقامية ثلاث نقط من المستوى العقدي؛ ● التأويل الهندسي لمعيار عدد عقدي.	⊗ ساعتان
	⊗ ***الشكل المثلثي لعدد عقدي*** ● عمدة عدد عقدي غير منعدم؛ ● الشكل المثلثي لعدد عقدي غير منعدم؛ ● زاوية متجهتين وعمدة عدد عقدي.	⊗ ثلاث ساعات
	⊗ ***التمثيل العقدي لتحويل اعتيادي*** ● الإزاحة؛ ● التحاكي.	⊗ ساعة
التوجيهات التربوية	♠ ينبغي التحسيس بضرورة إدخال الأعداد العقدية بشكل مختصر ومركز؛ ♠ نظرا لما يكتسيه التمثيل الهندسي من أهمية في ترسيخ مفهوم العدد العقدي فإن تناوله ينطلق مباشرة مع بداية الفصل ويواكب تقديم جل المفاهيم المقررة لبلورة التأويلات الهندسية لكل من المقابل و المرافق و المعيار والعمدة ومجموع عددين عقديين وجداء عدد عقدي في عدد حقيقي؛ ♠ يتم الربط بين معيار $z'-z$ و المسافة AB من جهة وعمدة $z'-z$ و الزاوية الموجهة $\left(\vec{i},\overrightarrow{AB}\right)$ من جهة ثانية حيث z و z' هما على التوالي لحق النقطتين A و B و $\vec{i}$ متجهة موجهة للمحور الحقيقي؛ ♠ يجب التركيز على ترجمة المفاهيم الهندسية، وخصوصا المسافة وقياس زاوية واستقامية النقط وتداور النقط، إلى مصطلحات الأعداد العقدية.	

I. المجموعة $\mathbb{C}$

1- الأعداد العقدية:

1/1 مبرهنة و ملاحظات :

توجد مجموعة $\mathbb{C}$ تحقق مايلي:

1- المجموعة $\mathbb{C}$ تتضمن $\mathbb{R}$

2- تحتوي على عدد غير حقيقي i الذي يحقق $i^2=-1$ ، نسمي i العدد التخيلي

3- المجموعة $\mathbb{C}$ تسمى مجموعة الأعداد العقدية أو المركبة

4- كل عنصر z يكتب على شكل $z=x+iy$ حيث x و y عددان حقيقيان يسمى عددا عقديا ، ونكتب $z\in\mathbb{C}$

1/2 ملاحظات :

لدينا : $\mathbb{N}\subset\mathbb{Z}\subset\mathbb{Q}\subset\mathbb{R}\subset\mathbb{C}$

لدينا : $\mathbb{C}=\{x+iy\ /\ (x;y)\in\mathbb{R}^2;\ i^2=-1\}$.

2- الشكل الجبري لعدد عقدي:

2 /1 تعريف

كل عدد عقدي z يكتب بكيفية وحيدة على الشكل $x+iy$ ، حيث x و y عددان حقيقيان

هذه الكتابة تسمى **الشكل الجبري** (أو الكتابة الجبرية) للعدد العقدي z .

العدد x يسمى الجزء الحقيقي لـ z ، نرمز له بـ $\mathrm{Re}(z)$

العدد y يسمى الجزء التخيلي لـ z ، نرمز له بـ $\mathrm{Im}(z)$

2 /2 أمثلة

لدينا :

العدد العقدي z	الجزء الحقيقي $\mathrm{Re}(z)$	الجزء التخيلي $\mathrm{Im}(z)$
$z_1=2+i3$		
$z_2=\frac{1}{2}+i$		
$z_3=-2i+3$		
$z_4=7i$		
$z_5=8$		
$z_6=i13$		
$z_7=0$		
$z_8=3+i(2-5i)$		

ملاحظات :

العدد $z_4=7i$ يسمى عدد تخيلي صرف وكذاك العدد $z_6=i13$ يسمى أيضا عدد تخيلي صرف

العدد $z_5=8$ يسمى عدد حقيقي

العدد $z_7=0$ يسمى العدد العقدي المنعدم

بصفة عامة:

إذاكان $x=0$ أي أن العدد العقدي z يكتب على شكل iy ، فإن z يسمي عددا تخيليا صرفا ،

و نرمز بالرمز $i\mathbb{R}$ لمجموعة الأعداد التخيلية الصرفة. $i\mathbb{R}=\{iy\ /\ y\in\mathbb{R}\}$

لدينا $\mathrm{Re}(z)=0\Leftrightarrow z\in i\mathbb{R}$. و $\mathrm{Im}(z)=0\Leftrightarrow z\in\mathbb{R}$

II. – العمليات الجبري في المجموعة $\mathbb{C}$ وتأويلاتها الهندسية

1- تساوي عددين عقددين – مجموع وجداء عددين عقديين:

1 /1 قوى العدد i - متطابقات هامة :

لكل a و b من $\mathbb{R}$

$$(a+ib)^2 = a^2 - b^2 + i2ab$$
$$(a-ib)^2 = a^2 - b^2 - i2ab$$
$$(a+ib)(a-ib) = a^2 + b^2$$

تمرين1 : قوى العدد i

1- أحسب i^0 ، i^1 ، i^2 ، i^3 ثم i^4

2- استنتج i^{2021} ; i^{256} ; $\left(\frac{1+i}{1-i}\right)^{76}$

الحل :

1- لدينا : $i^4 = \left(i^2\right)^2 = (-1)^2 = 1$; $i^3 = i^2 \times i = -i$; $i^2 = -1$; $i^1 = i$; $i^0 = 1$

2- لدينا : $i^{256} == \left(i^2\right)^{128} = (-1)^{128} = 1$ ، $i^{2021} == i^{2020} \times i = \left(i^2\right)^{1010} \times i = (-1)^{1010} \times i = i$

1 /2 خاصية تساوي عددين عقديين :

ليكن z و z' عددين عقددين المعرفين بمايلي: $z = x+iy$ و $z' = x'+iy'$, بحيث $x, y, x', y' \in \mathbb{R}$ لـدينا :

$$z = z' \Leftrightarrow \begin{cases} \mathrm{Re}(z) = \mathrm{Re}(z') \\ \mathrm{Im}(z) = \mathrm{Im}(z') \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \boxed{x = x'} \\ \boxed{y = y'} \end{cases}$$

حالة خاصة:

$$z = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \boxed{x = 0} \\ \boxed{y = 0} \end{cases}$$

تطبيق :

ليكن z و z' العددين العقديين المعرفين على مايلي: $z = 7 - 2i$ و $z' = 3x + 1 + 2iy$ حيث x و y عددان حقيقيان

1- حدد x و y بحيث يكون $z' = z$

2- حدد x و y بحيث يكون $z' = 0$

1 /3 خاصيات

ليكن z و z' عددين عقددين المعرفين بمايلي: $z = x+iy$ و $z' = x'+iy'$, بحيث $x, y, x', y' \in \mathbb{R}$ لـدينا :

المجموعة $\mathbb{C}$ مزودة بعمليتي الجمع و الضرب تمددان نفس العمليتين في $\mathbb{R}$ و لهما نفس الخاصيات، ومنه:

مجموع عددين عقديين: $z + z' = x + iy + x' + iy' = \boxed{(x+x') + i(y+y')}$

جداء عددين عقديين: $z \times z' = (x+iy) \times (x'+iy') = xx' + ixy' + iyx' - yy' = \boxed{(xx' - yy') + i(xy' + x'y)}$

ولدينا أيضا : $(x+iy) \times (x-iy) = x^2 - (iy)^2 = x^2 - i^2y^2 = \boxed{x^2 + y^2}$

تمرين 2:

أكتب على الشكل الجبري الأعداد العقدية التالية :

$$z_9 = z_2 + z_3 \text{ ، } z_{10} = z_2 \times z_3 \text{ ، } z_{11} = (z_1 - 1)^2 \text{ ، } z_{12} = \frac{1}{z_1} \text{ ، } z_{13} = \frac{3}{z_4} \text{ ، } z_{14} = \frac{z_1}{z_3}$$

III. التمثيل الهندسي لعدد عقدي .

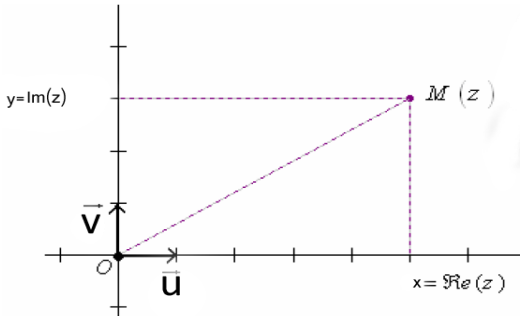
1- تعاريف :

المستوى (P) منسوب إلى معلم متعامد وممنظم و مباشر $(o;\vec{u};\vec{v})$.

نربط كل عدد عقدي $z = x + iy$ (حيث x و y عددان حقيقيان) بالنقطة الوحيدة $M(x,y)$

نقول إن :

- M تسمى **صورة** العدد العقدي z ، ونكتب $M(z)$
- $\overrightarrow{OM}$ هي الصورة المتجهية العدد العقدي z ، ونكتب $\overrightarrow{OM}(z)$ أي $z_{\overrightarrow{OM}} = x + iy$
- العدد العقدي z يسمى **لحق** النقطة M أو لحق المتجهة $\overrightarrow{OM}$ نكتب $aff(M) = z$ و $aff(\overrightarrow{OM}) = z$
- المستوى (P) منسوب إلى معلم متعامد و ممنظم و مباشر $(o;\vec{u};\vec{v})$ يسمى **المستوى العقدي**.



مصطلحات

الأعداد الحقيقية هي ألحاق نقط محور الأفاصيل الذي يسمى المحور الحقيقي .

الأعداد التخيلية الصرفة هي ألحاق نقط محور الآراتيب الذي يسمى المحور التخيلي.

2- لحق متجهة – لحق منتصف قطعة:

تمرين تطبيقي:

1- مثل في المستوى العقدي النقط التالية $A(1+i);B(-3);C(2i);D(-i);E(2-i3);F(-1+i2)$

2- حدد ألحاق المتجهات التالية : $\overrightarrow{OB}$; $\overrightarrow{CD}$; $\overrightarrow{AC}$; $\overrightarrow{AB}$,

3- حدد ألحاق المتجهات التالية : $\overrightarrow{CD}+\overrightarrow{OB}$; $-3\overrightarrow{AC}$; $2\overrightarrow{AB}$,

4- حدد لحق النقطة I منتصف $[AB]$

5- حدد لحق النقطة J منتصف $[CD]$

خاصيات :

لتكن A و B نقطتين من المستوى العقدي ، ألحاقهما z_A و z_B على التوالي

- لحق المتجهة $\overrightarrow{OA}$ هو العدد العقدي $z_{\overrightarrow{OA}} = z_A$
- لحق المتجهة $\overrightarrow{AB}$ هو العدد العقدي $z_B - z_A$ لدينا $aff(\overrightarrow{AB}) = z_{\overrightarrow{AB}} = z_B - z_A$.
- إذا كانت I منتصف القطعة $[AB]$ فإن : $aff(I) = \dfrac{z_A + z_B}{2}$

لتكن $\vec{u}$ و $\vec{v}$ متجهتين من المستوى العقدي ألحاقهما على التوالي $z_{\vec{u}}$ و $z_{\vec{v}}$ و α عدد حقيقي ، لدينا :

- $aff(\vec{u}+\vec{v}) = z_{\vec{u}+\vec{v}} = z_{\vec{u}} + z_{\vec{v}}$
- $aff(\alpha\vec{u}) = z_{\alpha\vec{u}} = \alpha z_{\vec{u}}$
- $\vec{u} = \vec{v} \Leftrightarrow z_{\vec{u}} = z_{\vec{v}}$

تمرين تطبيقي:

لتكن $A(2);B(i);C(1+3i);D(3+2i)$ أربع نقط من المستوى العقدي

1/ أنشئ الشكل

2/ أثبت أن الرباعي $ABCD$ متوازي أضلاع

3- استقامية ثلاث نقط من المستوى العقدي

نشاط:

لتكن $A(z_A);B(z_B);C(z_C)$ ثلاث نقط من المستوى العقدي مختلفة مثنى مثنى

تكون النقط $A;B;C$ مستقيمية إذا و فقط إذا كان $\overrightarrow{AB}=\alpha\overrightarrow{AC}$ بحيث $\alpha\in\mathbb{R}^*$ يكافئ $aff\left(\overrightarrow{AB}\right)=aff\left(\alpha\overrightarrow{AC}\right)$

يكافئ $Z_{\overrightarrow{AB}}=\alpha Z_{\overrightarrow{AC}}$

يكافئ $Z_B-Z_A=\alpha\left(Z_C-Z_A\right)$

يكافئ $\dfrac{Z_B-Z_A}{Z_C-Z_A}=\alpha\in\mathbb{R}^*$

أ- خاصية :

لتكن $A(z_A);B(z_B);C(z_C)$ ثلاث نقط من المستوى العقدي مختلفة مثنى مثنى ،

تكون النقط $A;B;C$ مستقيمية إذا و فقط إذا كان : $\dfrac{Z_B-Z_A}{Z_C-Z_A}$ عددا حقيقيا غير منعدم .

بتعبير اخر : النقط $A;B;C$ مستقيمية $\Leftrightarrow$ $\dfrac{Z_B-Z_A}{Z_C-Z_A}=\alpha\in\mathbb{R}^*$

ب-تطبيق: إثبات استقامية نقط

لتكن $A(6-i);B(-6+3i);C(-18+7i)$ نقط من المستوى العقدي، أثبت باستعمال الأعداد العقدية،أن النقط $A;B;C$ مستقيمية

IV. مرافق عدد عقدي - مقلوب عدد عقدي، خارج عددين عقديين:

1. تعاريف :

ليكن $z=x+iy$ عددا عقديا حيث x و y عددان حقيقيان

مرافق عدد عقدي : العدد العقدي $\boxed{x-iy}$ يسمى مرافق العدد العقدي z ، و نرمز له بالرمز $\overline{z}$

ليكن z و z' عددين عقديين ،بحيث $z\neq 0$ ، لدينا :

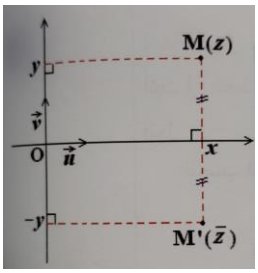
مقلوب عدد عقدي : $\dfrac{1}{z}=\dfrac{\overline{z}}{z\overline{z}}$

خارج عددين عقديين : $\dfrac{z'}{z}=\dfrac{z'\overline{z}}{z\overline{z}}$

مثال:

لدينا مرافق العدد العقدي z في الحالات التالية :

z	$\overline{z}$
$1+2i$	
$i3+5$	
$7i$	
3	
$1-\sqrt{2}$	
$1+2i(3+i)$	



ملحوظة:

التاويل الهندسي لمرافق عدد عقدي :

في المستوى العقدي النقطتان $M(Z)$; $M'(\overline{Z})$ متماثلتان بالنسبة للمحور الحقيقي

2. نتائج

ليكن $z = x + iy$ عددا عقديا ، حيث x و y عددان حقيقيان لدينا:

■ $z + \overline{z} = 2x = 2\,\mathrm{Re}(z)$.	■ $\overline{z} = z \Leftrightarrow z$ عدد حقيقي
■ $z - \overline{z} = 2iy = 2i\,\mathrm{Im}(z)$.	■ $\overline{z} = -z \Leftrightarrow z$ عدد تخيلي صرف
■ $z\overline{z} = x^2 + y^2$	

ملاحظة هامة :

ليكن $z = x + iy$ عددا عقديا حيث x و y عددان حقيقيان .

إذن $\overline{z} = x - iy$: ومنه $z\overline{z} = (x+iy)(x-iy) = x^2 - i^2y^2$

$$\boxed{z\overline{z} = x^2 + y^2}$$

مثال :

$$z = 3+2i \Rightarrow z\overline{z} = 3^2 + 2^2 = 9+4 = 13$$
$$z = 5-4i \Rightarrow z\overline{z} = 5^2 + (-4)^2 = 25+16 = 31$$
$$z = -1-7i \Rightarrow z\overline{z} = (-1)^2 + (-7)^2 = 1+49 = 50$$
$$z = 1-i \Rightarrow z\overline{z} = 1^2 + (-1)^2 = 1+1 = 2$$

3. خاصيات

ليكن z z' عددين عقدين و n عددا نسبيا لدينا :

□ $\overline{\overline{z}} = z$	□ $\overline{(z^n)} = (\overline{z})^n$
□ $\overline{z+z'} = \overline{z} + \overline{z'}$	□ $\overline{\left(\frac{z'}{z}\right)} = \frac{\overline{z'}}{\overline{z}}$ $z \neq 0$
□ $\overline{z \times z'} = \overline{z} \times \overline{z'}$	

4. تطبيقات :

تطبيق 1 :

حدد $\overline{z}$ في الحالات التالية : $z = (1+i)^{45}$; $z = \frac{1+2i}{1-i}$; $z = (3+i)(2-i)$; $z = \frac{(1+3i)^2}{1-i} + 3i$

تطبيق 2:

1- حل في $\mathbb{C}$ بطريقتين مختلفتين: $(z-1)(3-2i) = 5i$

2- حل في $\mathbb{C}$ المعادلتين : $z = 2\overline{z} - 2 + 6i$ و $2z + i\overline{z} = 5 - 4i$

تطبيق 3:

3- حدد مجموعة النقط $M(Z)$ بحيث: $z\overline{z} + z + 1 + i \in \mathbb{R}$; $z + 3\overline{z} + 5 + 2i \in i\mathbb{R}$.; $z^2 + 2z \in \mathbb{R}$

V. معيار عدد عقدي

1- تعريف:

ليكن $z = x + iy$ عددا عقديا، حيث x و y عددان حقيقيان.

العدد الحقيقي الموجب $\sqrt{z\bar{z}}$ يسمى معيار العدد العقدي z، نرمز له بالرمز $|z|$

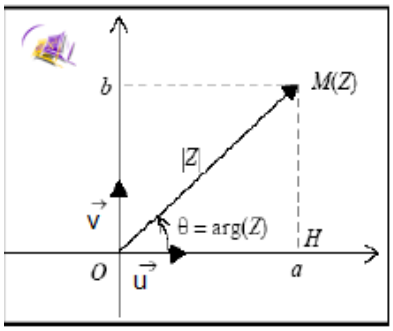
و لدينا : $|z| = \sqrt{z\bar{z}} = \sqrt{x^2 + y^2}$.

2- أمثلة

لدينا معيار العدد العقدي في الحالات التالية:

z	$\lvert z\rvert$
$1+2i$	$\lvert 1+2i\rvert = \sqrt{1^2+2^2} = \sqrt{5}$
$i3+5$	$\lvert i3+5\rvert = \lvert 5+i3\rvert = \sqrt{5^2+3^2} = \sqrt{41}$
$2-i$	$\lvert 2-i\rvert = \sqrt{2^2+(-1)^2} = \sqrt{5}$
$7i$	$\lvert 7i\rvert = \sqrt{0^2+7^2} = 7$
$1-2i(3+i)$	$\lvert 1-2i(3+i)\rvert = \lvert 1-6i+2\rvert = \lvert 3-6i\rvert = \sqrt{3^2+(-6)^2} = \sqrt{45}$

3- التأويل الهندسي



لتكن M نقطة من المستوى العقدي لحقها $z = x + iy$

لدينا $OM = \|\overrightarrow{OM}\| = \sqrt{x^2 + y^2}$ إذن معيار z هو المسافة OM، أي $OM = |z|$.

خاصية :

إذا كانت $A(z_A)$ ، $B(z_B)$ نقطتين من المستوى العقدي فإن $AB = \|\overrightarrow{AB}\| = |z_{\overrightarrow{AB}}|$.

مثال :

لتكن $A(-2+o)$; $B(1+4i)$ نقطتين من المستوى العقدي ، أحسب AB

4- خاصيات

لكل عددين عقديين z و z' ، و لدينا:

- $|\bar{z}| = |-z| = |z|$
- $z = 0 \Leftrightarrow |z| = 0$
- $|z \times z'| = |z||z'|$
- لكل عدد نسبي n لدينا $|z^n| = |z|^n$.
- إذا كان $z' \neq 0$ فإن : $\left|\frac{1}{z'}\right| = \frac{1}{|z'|}$
- إذا كان $z' \neq 0$ فإن : $\left|\frac{z}{z'}\right| = \frac{|z|}{|z'|}$
- $|z + z'| \leq |z| + |z'|$

ملحوظة:

لتكن $A(z_A); B(z_B); C(z_C)$ ثلاث نقط من المستوى العقدي مختلفة مثنى مثنى،

لدينا: $\frac{AB}{AC} = \frac{|z_{\overrightarrow{AB}}|}{|z_{\overrightarrow{AC}}|} = \left|\frac{z_{\overrightarrow{AB}}}{z_{\overrightarrow{AC}}}\right| = \left|\frac{z_B - z_A}{z_C - z_A}\right|$

تمرين تطبيقي 1

لتكن A و B و C نقط من المستوى العقدي،التي ألحاقها على التوالي: $z_A=1+i$ و $z_B=2+3i$ و $z_A=-1+2i$

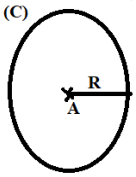
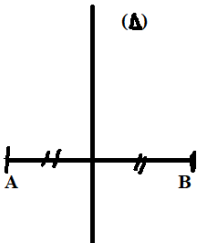
1- أنشئ الشكل

2- أثبت أن المثلث ABC متساوي الساقين وقائم الزاوية في A (حساب المسافات – مبرهنة فيتاغورس)

تمرين تطبيقي 2

ملاحظة:

لتكن $M(Z)$ نقط من المستوى العقدي و R عدد حقيقي

النقط التي تحقق $\lvert Z-Z_A\rvert=R$ حيث $R>0$ أي التي تحقق $AM=R$ هي الدائرة التي مركزها $A(Z_A)$ وشعاعها R.  حالة خاصة: النقط التي تحقق $\lvert Z-Z_A\rvert=0$ أي التي تحقق $AM=0$ ومنه النقط هي نفسها النقطة $A(Z_A)$	النقط التي تحقق $\lvert Z-Z_A\rvert=\lvert Z-Z_B\rvert$ أي التي تحقق $AM=MB$ هي واسط القطعة $[AB]$ 

تطبيق :

حدد مجموعة النقط $M(Z)$ بحيث:

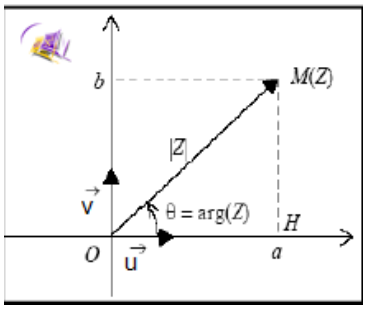
- $\lvert z\rvert=\lvert\bar{z}-1+2i\rvert$
- $\lvert z-2+3i\rvert=\lvert z+1-i\rvert$
- $\lvert z-1-i\rvert=4$

VI. عمدة عدد عقدي غير منعدم – الشكل المثلثي لعدد عقدي غير منعدم

نشاط 7 صفحة 146

المستوى (P)منسوب إلى معلم متعامد وممنظم و مباشر $(o;\vec{u};\vec{v})$.

z عدد عقدي غير منعدم و M نقطة من المستوى لحقها z



1- تعريف

كل قياس θ بالرديان للزاوية الموجهة $(\vec{u};\overrightarrow{OM})$ يسمى عمدة z و نرمز له بالرمز $\arg(z)$

نكتب : $\arg(z)\equiv(\overline{\vec{u};\overrightarrow{OM}})[2\pi]\equiv\theta[2\pi]$.

ولدينا $\arg(z)\equiv\theta[2\pi]\Leftrightarrow\arg(z)=\theta+2k\pi\ /\ k\in\mathbb{Z}$

ملحوظة:

العدد العقدي المنعدم ليس له عمدة

مثال:

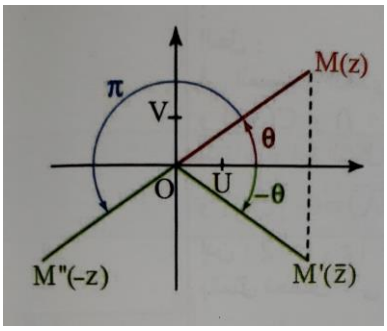
1. مثل النقط التالية ثم حدد عمدة ألحاقها : $E(i);C(-2i);B(-3);A(2)$
2. استنتج عمدة ألحاق النقط التالية $D'(\overline{Z_D});C'(\overline{Z_C});B'(\overline{Z_B});A'(\overline{Z_A})$ ، ماذاتلاحظ
3. استنتج عمدة ألحاق النقط التالية $B''(-Z_B);A''(-Z_A)$ ، ماذاتلاحظ

2- نتائج

ليكن z عددا عقديا غير منعدم لدينا

إذاكان z عدد حقيقيا فإن : $\operatorname{Re}(z)<0\Leftrightarrow\arg(z)\equiv\pi[2\pi]$ أو $\operatorname{Re}(z)>0\Leftrightarrow\arg(z)\equiv0[2\pi]$

إذاكان z عدد تخيلي صرف فإن : $\operatorname{Im}(z)<0\Leftrightarrow\arg(z)\equiv-\frac{\pi}{2}[2\pi]$ أو $\operatorname{Im}(z)\Leftrightarrow\arg(z)\equiv\frac{\pi}{2}[2\pi]$



3- خاصيات

ليكن z عددا عقديا غير منعدم ، لدينا :

- $\arg(-z)\equiv\pi+\arg(z)[2\pi]$ ▪ $\arg(\overline{z})\equiv-\arg(z)[2\pi]$

لكل عددين عقديين z و z' غير منعدمين، لدينا:

- $\arg(z^n)\equiv n\arg(z)[2\pi]$ لكل n من $\mathbb{Z}$. ▪ $\arg(z\times z')\equiv\arg(z)+\arg(z')[2\pi]$

- $\arg\left(\frac{z}{z'}\right)\equiv\arg(z)-\arg(z')[2\pi]$ ▪ $\arg(\frac{1}{z})\equiv-\arg(z)[2\pi]$

تمرين تطبيقي:

حدد عمدة العدد العقدي $1+i$

4- شكل مثلثي لعدد عقدي غير منعدم

تقديم:

لدينا $|1+i|=\sqrt{1^2+1^2}=\sqrt{2}$

ومنه $1+i=\sqrt{2}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}+i\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$

$$1+i=\sqrt{2}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}+i\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$$

$$1+i=\sqrt{2}\left(\cos\left(\frac{\pi}{4}\right)+i\sin\left(\frac{\pi}{4}\right)\right)$$

هذه الكتابة تسمى الشكل المثلثي للعدد العقدي $1+i$ ولدينا $|z|=\sqrt{2}$ و $\arg(z)\equiv\frac{\pi}{4}[2\pi]$

4 /1 تعريف:

ليكن z عددا عقديا غير منعدما،

الكتابة $z=r(\cos\theta+i\sin\theta)$ حيث : $r=|z|$ و $\arg(z)\equiv\theta[2\pi]$ تسمى شكلا **مثلثيا** للعدد العقدي z

نكتب كذلك $z=[r;\theta]$

4 /2 خاصية

ليكن z عددا عقديا غير منعدما، إذا كان $z=x+iy$ و $z=r(\cos\theta+i\sin\theta)$

فإن $|z|=r=\sqrt{x^2+y^2}$ و $\cos\theta=\frac{r}{x}$ و $\sin\theta=\frac{r}{y}$

4 /3 تمرين تطبيقي

1- حدد الشكل المثلثي للعدد العقدي في كل حالة من الحالات التالية:

$Z_1=3i$; $Z_2=2$; $Z_3=\sqrt{3}+3i$; $Z_4=-2+2i$; $Z_5=\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{i}{2}$

$Z_6=\frac{-1}{2}-i\frac{\sqrt{3}}{2}$; $Z_7=\sqrt{6}-i\sqrt{2}$; $Z_8=-3\left(\cos\left(\frac{\pi}{4}\right)+i\sin\left(\frac{\pi}{4}\right)\right)$; $Z_9=2\left(-\cos\left(\frac{\pi}{3}\right)+i\sin\left(\frac{\pi}{3}\right)\right)$

2- **حساب قوة عدد عقدي** ، أكتب العدد العقدي $Z=\left(\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{i}{2}\right)^{2019}$ على شكله المثلثي، واستنتج كتابته على الشكل الجبري.

الحل :

1- لدينا:

نذكر:

$$\begin{array}{lcl} Z & \longrightarrow & \arg(Z) \\ +a + ib & \longrightarrow & \theta \\ +a - ib & \longrightarrow & -\theta \\ -a + ib & \longrightarrow & \pi-\theta \\ -a - ib & \longrightarrow & \pi+\theta \end{array}$$

2- بالنسبة $Z=\left(\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{i}{2}\right)^{2019}$:

لدينا : $|Z|=\left|\left(\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{i}{2}\right)^{2019}\right|=\left|\left(\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{i}{2}\right)\right|^{2019}=1$

و

$$\begin{aligned}\arg(Z) &\equiv \arg\left(\left(\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{i}{2}\right)^{2019}\right)[2\pi] \\ &\equiv \left(\arg\left(\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{i}{2}\right)\right)^{2019}[2\pi] \\ &\equiv 2019\times\arg\left(\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{i}{2}\right)[2\pi] \\ &\equiv 2019\times\arg(Z_5)[2\pi] \\ &\equiv 2019\times\left(-\frac{\pi}{6}\right)[2\pi] \\ &\equiv 336\pi+\frac{\pi}{2}[2\pi]\end{aligned}$$

$\arg(Z)\equiv\frac{\pi}{2}[2\pi]$ ومنه : $Z=1\times\left(\cos\left(\frac{\pi}{2}\right)+i\sin\left(\frac{\pi}{2}\right)\right)=i$

1- نتائج

لكل عددين عقديين z و z' غير منعدمين، بحيث :

$z=r(\cos\theta+i\sin\theta)$ ($z'=r'(\cos\theta'+i\sin\theta')$ ، مع $r>0$ و $r'>0$

يكافئ: $z=[r;\theta]$; $z'=[r';\theta']$ ، لدينا:

- $-z=r(\cos(\pi+\theta)+i\sin(\pi+\theta))$
- $\bar{z}=[r;-\theta]$
- $z\times z'=[r;\theta]\times[r';\theta']=[rr';\theta+\theta']$
- $z^n=[r^n;n\theta]$
- $\frac{z}{z'}=\left[\frac{r}{r'};\theta-\theta'\right]$
- $\frac{1}{z}=\frac{1}{[r;\theta]}=\left[\frac{1}{r};-\theta\right]$

تطبيق : حساب نسب مثلثية

نعتبر العددين العقديين $a=-\sqrt{3}+i$ و $b=\sqrt{2}-\sqrt{2}i$ و $c=\frac{a}{b}$

1/ أكتب a و b على الشكل المثلثي.

2/ أكتب c على الشكل الجبري

3/ حد معيار وعمدة العدد العقدي c

4/ استنتج قيمتي $\cos(\frac{13\pi}{12})$ و $\sin(\frac{13\pi}{12})$.

5- زاوية متجهتين وعمدة عدد عقدي :

نشاط

نعتبر $A(z_A)$; $B(z_B)$; $C(z_C)$ و $D(z_D)$ أربع نقط مختلفة من المستوى العقدي

1- بين أن $\left(\overrightarrow{u};\overrightarrow{AB}\right)\equiv \arg(z_B-z_A)[2\pi]$

2- بين أن $\left(\overrightarrow{AB};\overrightarrow{CD}\right)\equiv \arg\left(\frac{z_D-z_C}{z_B-z_A}\right)[2\pi]$

الحل:

1- نعتبر النقطة M بحيث : $\overrightarrow{OM}=\overrightarrow{AB}$ إذن: $M(Z_B-Z_A)$ ومنه: $\left(\overrightarrow{u};\overrightarrow{AB}\right)\equiv\left(\overrightarrow{u};\overrightarrow{OM}\right)[2\pi]$

$$\equiv \arg(Z_B-Z_A)[2\pi]$$

2- لدينا : $\left(\overrightarrow{AB};\overrightarrow{CD}\right)\equiv\left(\overrightarrow{u};\overrightarrow{CD}\right)-\left(\overrightarrow{u};\overrightarrow{AB}\right)\quad[2\pi]$

$$\equiv \arg\left(z_{\overrightarrow{CD}}\right)-\arg\left(z_{\overrightarrow{AB}}\right)\ [2\pi]$$

$$\equiv \arg\left(\frac{z_D-z_C}{z_B-z_A}\right)\qquad[2\pi]$$

5/ 1 خاصيات

إذا كانت $A\ z_A)$ ($B(z_B)$ و $D(z_D);C(z_C)$ نقط مختلفة مثنى مثنى من المستوى العقدي فإن :

- $\left(\overrightarrow{u};\overrightarrow{AB}\right)\equiv \arg(z_{\overrightarrow{AB}})[2\pi]\equiv \arg(z_B-z_A)[2\pi]$
- $AB=|z_B-z_A|$
- $\left(\overrightarrow{AB};\overrightarrow{DC}\right)\equiv \arg\left(\frac{z_{\overrightarrow{DC}}}{z_{\overrightarrow{AB}}}\right)[2\pi]\equiv \arg\left(\frac{z_C-z_D}{z_B-z_A}\right)[2\pi]$
- $\left(\overrightarrow{AB};\overrightarrow{AC}\right)\equiv \arg\left(\frac{z_{\overrightarrow{AC}}}{z_{\overrightarrow{AB}}}\right)[2\pi]\equiv \arg\left(\frac{z_C-z_A}{z_B-z_A}\right)[2\pi]$

5/ 2 تطبيق

نعتبر النقط $A(\sqrt{2}(1+i));B(\sqrt{2}(-1+i));C(2i\sqrt{2})$

1- حدد الكتابة الجبرية للعدد العقدي $\frac{Z_B-Z_C}{Z_A-Z_C}$ ثم تأكد أن : $AC=BC$

2- حدد قياسا للزاوية $\left(\overrightarrow{CA};\overrightarrow{CB}\right)$

3- استنتج طبيعة المثلث ABC

6- نتائج

لتكن $A(z_A);B(z_B);C(z_C);D(z_D)$ أربع نقط من المستوى العقدي غير مستقيمية و مختلفة مثنى مثنى .

استقامية ثلاث نقط :

$$\left(\overrightarrow{AB};\overrightarrow{AC}\right)\equiv 0[2\pi]\quad ou\quad \left(\overrightarrow{AB};\overrightarrow{AC}\right)\equiv \pi[2\pi]$$

$$\arg\left(\frac{z_{\overrightarrow{AC}}}{z_{\overrightarrow{AB}}}\right)=0[2\pi]\quad ou\quad \arg\left(\frac{z_{\overrightarrow{AC}}}{z_{\overrightarrow{AB}}}\right)=\pi[2\pi]$$

توازي مستقيمين :

$$(AB)//(CD)\Leftrightarrow\left(\overrightarrow{AB};\overrightarrow{CD}\right)\equiv 0[2\pi]\quad ou\quad \left(\overrightarrow{AB};\overrightarrow{CD}\right)\equiv \pi[2\pi]$$

$$\Leftrightarrow \arg\left(\frac{z_{\overrightarrow{CD}}}{z_{\overrightarrow{AB}}}\right)=0[2\pi]\quad ou\quad \arg\left(\frac{z_{\overrightarrow{CD}}}{z_{\overrightarrow{AB}}}\right)=\pi[2\pi]$$

تعامد مستقيمين :

$$(AB)\perp(CD)\Leftrightarrow\left(\overrightarrow{AB};\overrightarrow{CD}\right)\equiv \frac{\pi}{2}[2\pi]\quad ou\quad \left(\overrightarrow{AB};\overrightarrow{CD}\right)\equiv -\frac{\pi}{2}[2\pi]$$

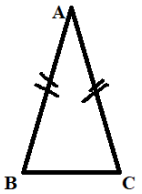
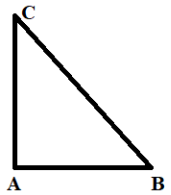
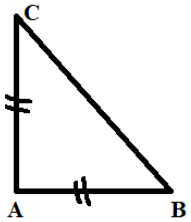
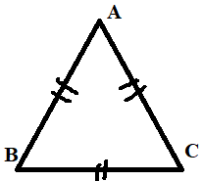
$$\Leftrightarrow \arg\left(\frac{z_{\overrightarrow{CD}}}{z_{\overrightarrow{AB}}}\right)=\frac{\pi}{2}[2\pi]\quad ou\quad \arg\left(\frac{z_{\overrightarrow{CD}}}{z_{\overrightarrow{AB}}}\right)=-\frac{\pi}{2}[2\pi]$$

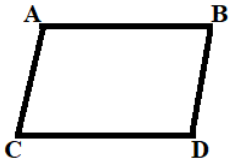
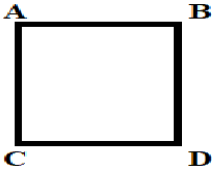
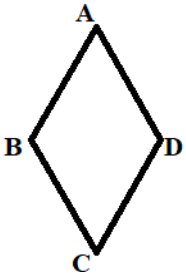
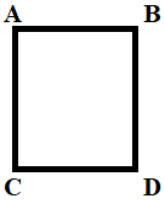
نقط متداورة:

$$\frac{Z_C-Z_A}{Z_B-Z_A}\times\frac{Z_B-Z_D}{Z_C-Z_D}\in\mathbb{R}$$

VII. استعمال الأعداد العقدية في مسائل هندسية :

1- تحديد طبيعة مثلث أو رباعي:

طبيعة المثلث	العلاقة العقدية
1.مثلث متساوي الساقين 	$AB = AC \Leftrightarrow \lvert z_{\overrightarrow{AB}} \rvert = \lvert z_{\overrightarrow{AB}} \rvert$ أو $\left\lvert \frac{Z_B - Z_A}{Z_C - Z_A} \right\rvert = 1$
2.مثلث قائم الزاوية 	$\arg\left(\frac{Z_B - Z_A}{Z_C - Z_A}\right) \equiv \pm\frac{\pi}{2}[2\pi]$ يعني أن $\frac{Z_B - Z_A}{Z_C - Z_A} = \pm yi$
3.مثلث قائم الزاوية ومتساوي الساقين 	$\begin{cases} \left\lvert \frac{Z_B - Z_A}{Z_C - Z_A} \right\rvert = 1 \\ \arg\left(\frac{Z_B - Z_A}{Z_C - Z_A}\right) \equiv \pm\frac{\pi}{2}[2\pi] \end{cases}$ يعني $\frac{Z_B - Z_A}{Z_C - Z_A} = \pm i$
4.مثلث متساوي الأضلاع 	ضلعان متقايسان + أحد قياسات زوايا المثلث تقايس $\pm\frac{\pi}{3}$

طبيعة الرباعي	العلاقة العقدية
1.$ABCD$ متوازي الأضلاع 	$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC} \Leftrightarrow z_{\overrightarrow{AB}} = z_{\overrightarrow{DC}}$
	القطرين $[AC]$ و $[BD]$ لهما نفس المنتصف
2.$ABCD$ مستطيل 	$ABCD$ متوازي الأضلاع + $(AB) \perp (DC)$
3.$ABCD$ معين 	$ABCD$ متوازي الأضلاع + $(BD) \perp (AC)$
	$ABCD$ متوازي الأضلاع + $AB = AD$
4.$ABCD$ مربع 	$ABCD$ متوازي الأضلاع + $(AB) \perp (DC)$ + $AB = AD$

ملاحظات	الدوال الأسية:

I. الدالة الأسية النبيرية: *Fonction exponentielle népérienne*

1) تعريف وخاصيات

نشاط:

1. بيّن أنّ الدّالّة $x \longmapsto \ln(x)$ تقبل دالة عكسية من $]0,+\infty[$ نحو مجال J يتم تحديده .

يرمز للدالة العكسية للدالة $x \longmapsto \ln(x)$ بالرمز exp و تسمى **الدالة الأسية النبيرية**.

2. أ) أحسب $\ln(1)$ ، $\ln(e)$ ، $\ln(e^3)$، $\ln\left(\frac{1}{e^2}\right)$ و $\ln(\sqrt[4]{e})$.

ب) إستنتج $exp(0)$, $exp(1)$ ، $exp(2)$، $exp(-2)$ و$exp\left(\frac{1}{4}\right)$.

3. أنشئ $(\mathcal{C}_{ln})$ و $(\mathcal{C}_{exp})$ في معلم متعامد ممنظم $(O,\vec{i},\vec{j})$.

4. حدد مبيانيا $\lim_{x\to+\infty}\exp(x)$ و $\lim_{x\to-\infty}\exp(x)$.

تعريف:

الدالة العكسية للدالة ln تسمّى الدالّة الأسّية النبرية، ونرمز لها بالرمز exp.

$$\begin{tikzcd}]0,+\infty[\arrow[r] &]-\infty,+\infty[\arrow[l, bend left, "exp"] \arrow[l, bend right, "ln"'] \end{tikzcd}$$

ليكن r عددا جذريا، لدينا: $\ln(\exp(r)) = r$ و نعلم أن: $\ln(e^r) = r\ln(e) = r$

إذن: $\ln(\exp(r)) = \ln(e^r)$

وبالتالي: $\exp(r) = e^r$ لكل عدد جذري r.

نمدد هذه الكتابة إلى المجموعة IR فنكتب: $\exp(x) = e^x$ لكل من IR.

لازمة:

- ⊗ الدالة $x \longmapsto e^x$ معرفة ومتصلة على $\mathbb{R}$.
- ⊗ $(\forall x \in \mathbb{R}),\ e^x > 0$.
- ⊗ $(\forall x \in]0;+\infty[)(\forall y \in \mathbb{R})\ ;\ e^y = x \Leftrightarrow ln(x) = y$.
- ⊗ $(\forall x \in \mathbb{R})\ ;\ ln(e^x) = x$ و$(\forall x \in]0;+\infty[)\ ; e^{ln(x)} = x$.
- ⊗ الدالة $x \longmapsto e^x$ تزايدية قطعا على $\mathbb{R}$:
- ⊗ $(\forall a,b \in \mathbb{R}), e^a > e^b \Rightarrow a > b$.
- ⊗ $(\forall a,b \in \mathbb{R}), e^a = e^b \Rightarrow a = b$.

تطبيق ①:

نعتبر الدالة العددية المعرفة ب $f(x) = \frac{e^x}{2e^x+1}$.

1. حدد D_f مجموعة تعريف f.
2. بين أن f متصلة على $\mathbb{R}$.
3. أحسب $f(0)$ و $f(ln(3))$.

ذ. لطرش عبد الكبير

تطبيق②:

حل في $\mathbb{R}$ المعادلات و المتراجحات التالية:

- $e^{1-x} = e^{x-x^2}$
- $e^{x^2-x} = 1$
- $(e^x)^2 - 3e^x + 2 = 0$
- $(e^x)^2 - 3e^x + 2 < 0$
- $(e^x + 2)(e^{-x+1} - 4) \geq 0$

خاصية:

ليكن x و y من $\mathbb{R}$ و $r \in \mathbb{Q}$ لدينا :

- ⊗ $e^{x+y} = e^x e^y$.
- ⊗ $e^{-x} = \frac{1}{e^x}$.
- ⊗ $e^{x-y} = \frac{e^x}{e^y}$.
- ⊗ $(e^x)^r = e^{rx}$

تطبيق:

1. بسط ما يلي:

$$A = \frac{e^{2x} \times e^{3x}}{(e^x)^4} \qquad B = (e^{2-x})^2 \times e^{3x-4} \qquad C = e^{2x}((e^x + e^{-x})^2 + (e^x - e^{-x})^2)$$

2. بين أن: $(\forall x \in \mathbb{R})\ \frac{e^x - 1}{e^x + 1} = \frac{1 - e^{-x}}{1 + e^{-x}}$

تمرين:

1)-حل في $\mathbb{R}$ ما يلي:

- $\frac{e^{2x+1}}{e^{x-3}} > e^{-x+2}$
- $(e^x)^{15} \times e^{x^2+5} = \frac{e^{5x}}{e^4}$
- $e^x + 6e^{-x} - 5 = 0$

2)-حل في $\mathbb{R}^2$ النظمة التالية: $\begin{cases} 5e^{2x+1} + 3e^{-y} = 3 \\ 7e^{2x+1} - 4e^{-y} = 2 \end{cases}$

2 نهايات إعتيادية :

خاصية:

- ⊗ $\lim_{x \to +\infty} e^x = +\infty$.
- ⊗ $\lim_{x \to -\infty} e^x = 0$.
- ⊗ $\lim_{x \to +\infty} \frac{e^x}{x} = +\infty$.
- ⊗ $\lim_{x \to -\infty} xe^x = 0$.
- ⊗ $\lim_{x \to 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1$.

برهان: لنبين $\lim_{x \to +\infty} \frac{e^x}{x} = +\infty$.

بصفة عامة:

- ♣ $\lim_{x \to +\infty} \frac{e^x}{x^n} = +\infty$.
- ♣ $\lim_{x \to -\infty} x^n e^x = 0$.

تطبيق:

أحسب النهايات التالية:

① $\lim_{x \to +\infty} e^{\frac{x+4}{x}}$ ③ $\lim_{x \to +\infty} x^2 - e^x$ ⑤ $\lim_{x \to +\infty} (x-1)e^{-x}$

② $\lim_{x \to -\infty} e^{x^3+3x}$ ④ $\lim_{x \to 0} \frac{e^{2x} - 1}{x}$ ⑥ $\lim_{x \to +\infty} \sqrt{x}e^{-x}$

ذ. لطرش عبد الكبير

⑦ $\lim_{x\to 0}\frac{e^{2x}-1}{e^{3x}-1}$

3) مشتقة الدالة الأسية النبرية :

نضع $f(x)=ln(x)$ $(\forall x\in]0,+\infty[)$.

لدينا: $f^{-1}(x)=e^x$ $(\forall x\in\mathbb{R})$.

نعلم أن: $(f^{-1})'(x)=\frac{1}{f'(f^{-1}(x))}$.

إذن: $(exp)'(x)=\frac{1}{\frac{1}{e^x}}=e^x$

وبالتالي $\forall x\in\mathbb{R}\,,(exp)'(x)=e^x$

خاصية:

الدالة $x\longmapsto e^x$ قابلة للإشتقاق على $\mathbb{R}$ ولدينا: $(\forall x\in\mathbb{R})\ (exp)'(x)=e^x$.

تطبيق:

نعتبر الدالة العددية المعرفة ب $f(x)=x-\frac{e^x-1}{e^x+1}$ وليكن (C) منحناها في معلم متعامد ممنظم.

1)-أ- تحقق أن من أجل كل عدد حقيقي x : $f(x)=x+1-\frac{2e^x}{e^x+1}$.

ب- تحقق أن من أجل كل عدد حقيقي x : $f(x)=x-1-\frac{2}{e^x+1}$.

ج- استنتج نهايتي الدالة f عند $+\infty$ و عند $-\infty$.

د- ادرس الفروع اللانهائية للدالة f عند $+\infty$ و عند $-\infty$.

2)-أ- بين أن الدالة f قابلة للاشتقاق على IR.

ب- ضع جدول تغيرات الدالة f.

3)-تحقق أن الدالة f فردية.

4)-أنشئ منحنى الدالة f .

خاصية:

إذا كانت u دالة قابلة للإشتقاق على مجال I. فإن الدالة $f:x\mapsto e^{u(x)}$ قابلة للإشتقاق على I. ولدينا
$(\forall\, x\in I)\quad f'(x)=u'(x)e^{u(x)}$

تطبيق:

أحسب مشتقات الدوال التالية:

- $(\forall\, x\in\mathbb{R})\ \ f_1(x)=e^{x^4+2x}$
- $(\forall x>-1)\ f_2(x)=e^{x-2\ln(x+1)}$
- $(\forall x\geq 0)\ f_3(x)=e^{\sqrt[3]{x}}$

لازمة:

لتكن u دالّة قابلة للإشتقاق على مجال I.
الدوال الأصلية للدالة $x\mapsto u'(x)e^{u(x)}$ على I هي الدوال المعرّفة على I بما يلي: $x\longmapsto e^{u(x)}+k$ حيث $k\in\mathbb{R}$.

تطبيق:

حدد الدوال الأصلية للدوال التالية:

ذ. لطرش عبد الكبير

$f_1(x) = e^{5x+4}$	$f_2(x) = (x^2+1)e^{x^3+3x}$	$f_3(x) = \sin(x)e^{\cos(x)}$

II. الدالة الأسية للأساس a $(a \neq 1; a > 0)$:

تعريف:

ليكن a عنصرا من $\mathbb{R}_+^* \setminus \{1\}$.
لدالة العكسية للدالة $x \longmapsto \log_a(x)$ تسمى الدالة الأسية للأساس a، ونرمز لها بالرمز $exp_a(x)$ أو a^x وهي معرفة على $\mathbb{R}$.

$$\begin{tikzcd}]0,+\infty[\arrow[r] \arrow[r, bend left, "ln_a"] &]-\infty,+\infty[\arrow[l, bend left, "exp_a"] \end{tikzcd}$$

لدينا:

$$a^x = y \Leftrightarrow x = log_a(y) \Leftrightarrow x = \frac{ln(y)}{ln(a)} \Leftrightarrow xln(a) = ln(y) \Leftrightarrow e^{xln(a)} = y$$

إذن:

$$(a \neq 1; a > 0)\ a^x = e^{xln(a)}$$

أمثلة:

- $2^x = e^{xln(2)}$.
- $4^{\sqrt{2}} = e^{\sqrt{2}ln(4)} = e^{2\sqrt{2}ln(2)}$.
- $\sqrt{3}^x = e^{xln(\sqrt{3})} = e^{\frac{x}{2}ln(3)}$.

ملاحظة: $(\forall x \in \mathbb{R})\ 1^x = 1$

خاصية:

لكل x و y من $\mathbb{R}$ ، ولكل $r \in \mathbb{Q}$ لدينا :
- ⊗ $a^{x+y} = a^x a^y$.
- ⊗ $a^{-x} = \frac{1}{a^x}$.
- ⊗ $a^{x-y} = \frac{a^x}{a^y}$.
- ⊗ $a^{rx} = (a^x)^r$.

تطبيق:

بين أن: $\frac{9^{\frac{2}{ln(3)}}8^{\frac{3}{ln(4)}}}{25^{\frac{4}{ln(5)}}} = \sqrt{e}$.

تمرين:

1. حل في $\mathbb{R}$ المتراجحات التالية : $3^x > 9^x$ و $(\frac{1}{2})^x \leq \frac{1}{4}$.
2. أحسب مشتقة f و g بحيث: $f(x) = 2^{x^2+2x+2}$ و $g(x) = x^x$.
3. أحسب النهايات التالية: $lim_{x\to+\infty} 5^x$ ، $lim_{x\to+\infty} \left(\frac{1}{3}\right)^x$ ، $lim_{x\to+\infty} \frac{4^x-2^x}{3^x}$ و $lim_{x\to0} \frac{4^x-2^x}{x}$.

ذ. لطرش عبد الكبير

الأكاديمية الجهوية للتربية والتكوين جهة فاس مكناس - مديرية فاس الثانوية التأهيلية عبد الله الشفشاوني	❀❀ الأعداد العقدية (الجزء الثاني) ❀❀	المستوى : الثانية باكالوريا مسلك علوم شعبة العلوم التجريبية السنة الدراسية : 2020/2021

المدة الزمنية: خمس ساعات

القدرات المنتظرة	♠ حل المعادلة: $az^2+bz+c=0$ حيث a و b و c عداد حقيقية و $(a\neq 0)$ ♠ حل معادلات تؤول في حلها إلى معادلات من الدرجة الثانية بجهول واحد.	
محتوى البرنامج	**الفقرة**	**المدة المتوقعة**
	⊗ الترميز الأسي وتطبيقات مثلثية ⊗ الترميز الأسي للأعداد العقدية ⊗ صيغة موافر- صيغتا أولير- تطبيقات:	⊗ ثلاث ساعات
	⊗ المعادلات من الدرجة الثانية في C	⊗ ساعة
	⊗ التمثيل العقدي لدوران ⊗ تمرين توليفي	⊗ ساعتان
التوجيهات التربوية	♠ يتم التطرق إلى حل معادلات من الدرجة الثانية بمجهول واحد في C معاملاتها أعداد حقيقية؛ ♠ تعتبر المعادلة من الدرجة الثانية التي معاملاتها اعداد عقدية غير حقيقية خارج البرنامج إلا التي تؤول في حلها إلى معادلات من الدرجة الثانية بمجهول واحد معاملاتها حقيقية.	

نشاط :

حل في $\mathbb{C}$ المعادلات التالية : $z^2=9$, $z^2=-4$, $z^2=-1$

I. لمعادلات من الدرجة الثانية بمجهول واحد في $\mathbb{C}$

1- المعادلة $z^2=a$ حيث $a\in\mathbb{R}$

1 /1 خاصية:

ليكن a عددا حقيقيا غير منعدم . حلا المعادلة $z^2=a$ في المجموعة $\mathbb{C}$ هما :

- $\sqrt{a}$ و $-\sqrt{a}$ إذا كان $a>0$
- $i\sqrt{-a}$ و $-i\sqrt{-a}$ إذا كان $a<0$

1 /2 أمثلة

أ-حلا المعادلة $z^2=7$ في $\mathbb{C}$ هما $\sqrt{7}$ و $-\sqrt{7}$

ب-حلا المعادلة $z^2=-5$ في $\mathbb{C}$ هما $i\sqrt{5}$ و $-i\sqrt{5}$

ج- حل في $\mathbb{C}$ المعادلة $z^2-2z+2=0$

2- المعادلة $az^2+bz+c=0$ حيث c,b,a أعداد حقيقية و a غير منعدم

2/ 1 خاصية :

نعتبر في المجموعة $\mathbb{C}$ المعادلة $az^2+bz+c=0$ حيث c,b,a أعداد حقيقية و a غير منعدم .

- العدد الحقيقي $\Delta=b^2-4ac$ يسمى مميز المعادلة $az^2+bz+c=0$.
- إذا كان $\Delta>0$ فإن المعادلة تقبل حلين حقيقيين : $z_1=\dfrac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}$; $z_2=\dfrac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}$
- إذا كان $\Delta=0$ فإن المعادلة تقبل حلا حقيقيا مزدوجا هو : $z=\dfrac{-b}{2a}$
- إذا كان $\Delta<0$ فإن المعادلة تقبل حلين عقديين مترافقين : $z_1=\dfrac{-b-i\sqrt{-\Delta}}{2a}$; $z_2=\dfrac{-b+i\sqrt{-\Delta}}{2a}$

2/ 2 تمرين تطبيقي

تطبيق 1 :

حل في $\mathbb{C}$ المعادلتيين $2z^2-z+1=0$; $-2z^2+3z-1=0$

تطبيق 2 :

نعتبر الحدودية $P(z)=z^3-3z^2+4z-2$

1- بين أن 1 جذر للحدودية $P(z)$

2- حدد العددين الحقيقين a و b بحيث : $P(z)=(z-1)(z^2+az+b)$

3- حل في $\mathbb{C}$ المعادلة : $P(z)=0$

2/ 3 نتائج

إذا كان z_1 و z_2 حلي المعادلة $az^2+bz+c=0$ فإن

✓ $az^2+bz+c=a(z-z_1)(z-z_2)$ لكل z من $\mathbb{C}$

✓ $z_1+z_2=\dfrac{-b}{a}$; $z_1z_2=\dfrac{c}{a}$

II. الترميز الأسي لعدد عقدي غير منعدم

تقديم :

حدد الشكل المثلثي للعدد العقدي: $z=\sqrt{2}+i\sqrt{6}$

لدينا : $z=2\sqrt{2}\left(\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)=\left[2\sqrt{2};\frac{\pi}{3}\right]$ الكتابة $z=2\sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{3}}$ تسمى ترميزا أسيا للعدد العقدي z

1- تعريف

كل عدد عقدي غير منعدم، معياره r و عمدته θ يكتب على الشكل $re^{i\theta}$ ، هذه الكتابة تسمى ترميزا أسيا للعدد العقدي z

لدينا $z=r(\cos\theta+i\sin\theta)=[r;\theta]=re^{i\theta}$

مثال :

ليكن $z=1+i$ لدينا $z=\sqrt{2}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}+i\frac{\sqrt{2}}{2}\right)=\left[\sqrt{2};\frac{\pi}{4}\right]$ و بالتالي $z=\sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}}$

2- الترميز الأسي و العمليات

1 /2 خاصيات أساسية:

ليكن $z=re^{i\theta}$; $z'=r'e^{i\theta'}$ لدينا:

$\frac{z}{z'}=\frac{re^{i\theta}}{r'e^{i\theta'}}=\frac{r}{r'}e^{i(\theta-\theta')}$

$-z=-re^{i\theta}=re^{i(\theta+\pi)}$

$\bar{z}=\overline{re^{i\theta}}=re^{-i\theta}$

$zz'=re^{i\theta}r'e^{i\theta'}=rr'e^{i(\theta+\theta')}$

$\frac{1}{z}=\frac{1}{re^{i\theta}}=\frac{1}{r}e^{-i\theta}$

2 /2 تطبيق :

أ-أكتب على الشكل الأسي الأعداد :

$$Z_0=3i\ ;\ Z_1=-7\ ;\ Z_2=1+i\ ;\ Z_3=1-i\sqrt{3}\ ;\ Z_4=\left(1-i\sqrt{3}\right)^4\ ;\ Z_5=\frac{1+i}{1-i\sqrt{3}}\ ;\ Z_6=(1+i)\left(1-i\sqrt{3}\right)$$

ب- نعتبر العدد العقدي $z=3e^{i\frac{\pi}{3}}$ ، بين أن z^{57} عدد حقيقي سالب

3- صيغتا أولير – صيغة موافر

تقديم :

نعلم أن
$$\begin{cases}\cos(\theta)+i\sin(\theta)=e^{i\theta} & \boxed{1}\\ \cos(-\theta)+i\sin(-\theta)=e^{-i\theta} & \boxed{2}\end{cases}$$

نجمع طرفي المتفاوتة فنجد $\cos\theta=\frac{e^{i\theta}+e^{-i\theta}}{2}$

نقوم بطرح طرفي المتفاوتة فنجد $\sin\theta=\frac{e^{i\theta}-e^{-i\theta}}{2i}$

نسمي هاتين الصيغتين بصيغتي أولير

3 /1 خاصية :

صيغتا أولير : ليكن θ عددا حقيقيا ، لدينا : $\cos\theta=\frac{e^{i\theta}+e^{-i\theta}}{2}$ و $\sin\theta=\frac{e^{i\theta}-e^{-i\theta}}{2i}$

صيغة موافر : ليكن θ عددا حقيقيا و n عنصرا من $\mathbb{N}$ ، لدينا $(\cos\theta+i\sin\theta)^n=\cos(n\theta)+i\sin(n\theta)$

هذه المتساوية تسمى صيغة موافر ، و تكتب أيضا $\left(e^{i\theta}\right)^n=e^{in\theta}$

3 /2 تمرين تطبيقي

تطبيق 1 :

1- أحسب $(\cos\theta+i\sin\theta)^2$ بطريقتين مختلفتين

2- استنتج $\cos(2\theta)$ و $\sin(2\theta)$.

تطبيق 2 :

أخطط التعابير التالية : $\cos^3(x)$ و $\sin^3(x)$

III. التمثيل عقدي للتحويلات :

المستوى (P) منسوب إلى معلم متعامد وممنظم و مباشر $(o;\vec{u};\vec{v})$.

1- تعريف:

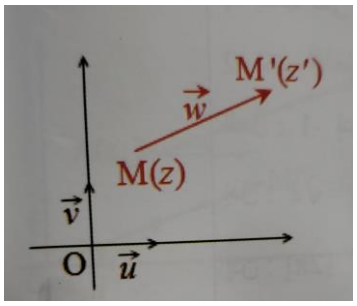
نربط كل تحويل F للمستوى العقدي (P) بالتطبيق f من $\mathbb{C}$ نحو $\mathbb{C}$ الذي يربط كل عدد عقدي Z، لحق نقطة M من (P) بالعدد Z' لحق النقطة M' صورة M بالتحويل F

الكتابة $Z' = f(Z)$ تسمى التمثيل العقدي للتحويل F

2- التمثيل العقدي للإزاحة:

2 /1 خاصية:

لتكن $M(Z)$; $M'(Z')$ من المستوى العقدي ، بحيث M' صورة M بالإزاحة t ذات المتجهة $\vec{w}(Z_{\vec{w}})$



يكافئ
$$t_{\vec{w}}(M) = M' \Leftrightarrow \overrightarrow{MM'} = \vec{w}$$
$$\Leftrightarrow Z' - Z = Z_{\vec{w}}$$
$$\Leftrightarrow \boxed{Z' = Z + Z_{\vec{w}}}$$

مثال:

حدد الكتابة العقدية للتحويل التالي: الإزاحة $t_{\vec{u}}$ حيث $Z_{\vec{u}} = 2+i$

2 /2 تمرين تطبيقي:

لتكن $A(1+i)$; $B(-2+3i)$; $C(2+2i)$ ثلاث نقط من المستوى العقدي

1- حدد التمثيل العقدي للإزاحة t التي تحول A الى B

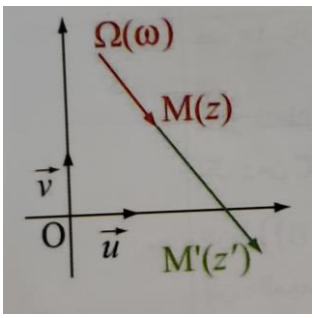
2- استنتج لحق C' صورة النقطة C بالإزاحة t

3- ماهي طبيعة الرباعي $ABC'C$

3- التمثيل العقدي للتحاكي:

4 /1 خاصية:

لتكن $M(Z)$; $M'(Z')$ و $\Omega(Z_\Omega)$ من المستوى العقدي ، بحيث M' صورة M بالتحاكي h الذي مركزه $\Omega(Z_\Omega)$ ونسبته K حيث K عدد حقيقي غير منعدم.



يكافئ
$$h_{(\Omega;K)}(M) = M' \Leftrightarrow \overrightarrow{\Omega M'} = K \times \overrightarrow{\Omega M}$$
$$\Leftrightarrow \frac{Z' - Z_\Omega}{Z - Z_\Omega} = K$$
$$\Leftrightarrow \boxed{Z' - Z_\Omega = K \times (Z - Z_\Omega)}$$

مثال :

حدد الكتابة العقدية للتحويل التالي التحاكي $h(\Omega(-3+i); k=2)$

4 /2 تمرين تطبيقي:

ليكن h تحاكي مركزه النقطة $I(i)$ ونسبته -2 و لتكن $A(3+i)$; $B(-2+3i)$; $C(-4-3i)$ ثلاث نقط من المستوى العقدي

1- حدد التمثيل العقدي للتحاكي h

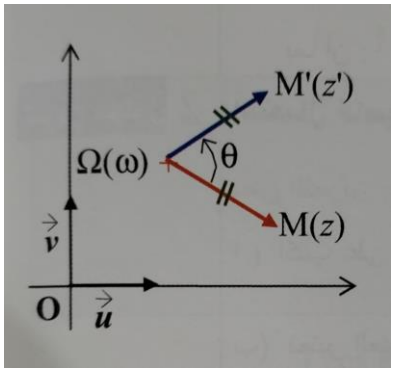
2- استنتج لحق النقطة A' صورة النقطة A بالتحاكي h

3- بين أن C هي صورة النقطة B بالتحاكي h

4- التمثيل العقدي للدوران:

4 /1 خاصية:

لتكن $M(Z)$; $M'(Z')$ و $\Omega(Z_\Omega)$ من المستوى العقدي ، بحيث M' صورة M بالدوران R الذي مركزه $\Omega(Z_\Omega)$ وزاويته θ حيث θ عدد حقيقي .



يكافئ $R_{(\Omega;K)}(M)=M' \Leftrightarrow \overrightarrow{\Omega M'}=\overrightarrow{\Omega M}$ و $\left(\overline{\overrightarrow{\Omega M'},\overrightarrow{\Omega M}}\right)\equiv\theta[2\pi]$

$$\Leftrightarrow \frac{Z'-Z_\Omega}{Z-Z_\Omega}=e^{i\theta}$$

$$\Leftrightarrow \boxed{Z'-Z_\Omega=e^{i\theta}\times(Z-Z_\Omega)}$$

مثال :

حدد الكتابة العقدية للتحويل التالي: الدوران $R\left(\Omega(-3+i);\theta=\frac{2\pi}{3}\right)$

4 /2 تمرين تطبيقي:

تطبيق 1 :

R دوران مركزه النقطة $I(i)$ وزاويته $\frac{\pi}{2}$ و لتكن $A(3+i)$ نقطة من المستوى العقدي

1- حدد التمثيل العقدي للدوران R

2- استنتج الحق Z' للنقطة A' صورة النقطة A بالدوران R

تطبيق 2:

نعتبر الدوران $r\left(O;\frac{\pi}{3}\right)$ و النقط $C(z_C);B(z_B);A(z_A)$ ثلاث نقط من المستوى العقدي

بحيث $z_A=\sqrt{3}-i$; $z_B=\sqrt{3}+i$; $z_C=2i$

1. بين أن : $r(B)=C$; $r(A)=B$
2. حدد طبيعة الرباعي $OABC$

خلاصة:

التحويل	التمثيل العقدي	استنتاجات
الإزاحة: $t_{\vec{u}}$ بحيث $\vec{u}(b)$	$z'=z+b$	$\overrightarrow{MM'}=\vec{u}$
التحاكي: $h(\Omega;k)$ بحيث $\Omega(\omega)$	$z'-\omega=k(z-\omega)$	$\overrightarrow{\Omega M'}=K\times\overrightarrow{\Omega M}$
الدوران: $r(\Omega;\theta)$ بحيث $\Omega(\omega)$	$z'-\omega=e^{i\theta}(z-\omega)$	$\begin{cases}\overrightarrow{\Omega M'}=\overrightarrow{\Omega M}\\ \left(\overline{\overrightarrow{\Omega M'},\overrightarrow{\Omega M}}\right)\equiv\theta[2\pi]\end{cases}$

تمارين: 54 إلى 58 صفحة 169 من كتاب الواضح في الرياضيات

25 و 26 صفحة 243 من كتاب الواضح في الرياضيات.

ملاحظات	المعادلات التفاضلية Equations différentielles

نشاط:

نعتبر الدالة العددية f المعرفة على $\mathbb{R}$ بما يلي: $f(x) = 2e^{-4x}$.

نضع $y = f(x)$ و $y' = f'(x)$ و $y'' = f''(x)$.

بين ما يلي: $y'' + 3y' - 4y = 0$.

كل معادلة يكون المجهول فيها دالة تحتوي على مشتقة او مشتقات هذه الدالة تسمى معادلة تفاضلية.

I. المعادلات التفاضلية من الرتبة الأولى:

1. المعادلة التفاضلية: $y' = ay$.

خاصية:

ليكن a عددا حقيقيا .

حلول المعادلة التفاضلية : $y' = ay$ هي مجموعة الدوال المعرفة على $\mathbb{R}$ بما يلي : $x \mapsto ke^{ax}$ حيث k عدد حقيقي.

تطبيق:

1) حل المعادلات التفاضلية التالية:

❶ $y' = 3y$ ❷ $y' + 5y = 0$

2) أ) حل المعادلة التفاضلية التالية: $3y' - 2y = 0$ (E).

ب) حدد الدالة f التي تحقق المعادلة التفاضلية (E) بحيث $f(3) = -1$.

2. المعادلة التفاضلية: $y' = ay + b$.

خاصية:

ليكن a و b عددين حقيقيين غير منعدمين.

الحل العام للمعادلة التفاضلية : $y' = ay + b$ هي مجموعة الدوال المعرفة على $\mathbb{R}$ بما يلي :

$x \mapsto ke^{ax} - \frac{b}{a}$: حيث k عدد حقيقي.

تطبيق:

1) حل المعادلة التفاضلية: $y' = 3y + 1$.

2) أ- حل المعادلة التفاضلية: $(E'): 3y' - 5y - 2 = 0$

ب. حدد الدالة f التي تحقق المعادلة التفاضلية (E) إذا علمت ان (C_f) يمر من النقطة $A(0,1)$.

II. المعادلة التفاضلية من الرتبة الثانية: $y'' + a\,Y' + BY = 0$

تعريف:

ليكن a و b عددين حقيقيين. نعتبر $(E): y'' + a\,y' + by = 0$.

المعادلة $r^2 + ar + b = 0$ ذات المجهول r تسمى **المعادلة المميزة** للمعادلة التفاضلية (E).

ليكن Δ مميز المعادلة المميزة $r^2 + ar + b = 0$

إذا كان $\Delta > 0$	إذا كان $\Delta = 0$	إذا كان $\Delta < 0$
للمعادلة المميزة حلين مختلفين r_1 و r_2	للمعادلة المميزة حلا وحيدا r_0	للمعادلة المميزة حلين عقديين: $r_1 = p + iq$ و $r_2 = \overline{r_1}$

حلول المعادلة التفاضلية $y'' + a\,y' + by = 0$

$x \mapsto \alpha e^{r_1 x} + \beta e^{r_2 x}$	$x \mapsto (\alpha + \beta x) e^{r_0 x}$	$x \mapsto e^{px}(\alpha \cos(qx) + \beta \sin(qx))$

تطبيق:

1) حل المعادلات التفاضلية التالية :

(E_1): $y'' - 3\,y' + 2y = 0$ $\quad$ (E_2): $y'' + 4\,y' + 4y = 0$

(E_3): $y'' - 4\,y' + 13y = 0$

2) أ- حل المعادلة التفاضلية: (E'): $y'' - 5\,y' + 6y = 0$

ب. حدد الدالة f التي تحقق المعادلة التفاضلية (E) بحيث: $y(0) = 1$ و $y'(0) = 2$.

3) أ- حل المعادلة التفاضلية: (E''): $y'' + 4y = 0$

حدد الدالة f التي تحقق المعادلة التفاضلية (E) بحيث: $f\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1$ و $f'\left(\frac{\pi}{2}\right) = 2$

الأكاديمية الجهوية للتربية والتكوين جهة فاس مكناس - مديرية فاس الثانوية التأهيلية عبد الله الشفشاوني	❀ ❀ الحساب التكاملي ❀ ❀	المستوى : الثانية باكالوريا مسلك علوم شعبة العلوم التجريبية السنة الدراسية : 2020/2021

المدة الزمنية: عشر ساعات

القدرات المنتظرة	♠ حساب تكامل دوال بتوظيف تقنيتي حساب التكامل. ♠ التمكن من حساب مساحة حيز المستوى المحصور بين منحنيين و مستقيمين متوازيين لمحور الأراتيب. ♠ التمكن من حساب حجم المجسم المولد بدوران منحنى دالة حول محور الأفاصيل.	
محتوى البرنامج	الفقرة	المدة المتوقعة
	⊗ تكامل دالة متصلة على قطعة	⊗ ساعتان
	⊗ خاصيات التكامل : التكامل و الترتيب- القيمة المتوسطة	⊗ ساعة
	⊗ تقنيات لحساب التكامل : استعمال الدوال الأصلية – المكاملة بالأجزاء	⊗ ثلاث ساعات
	⊗ حساب المساحات و الحجوم	⊗ ساعتان
	⊗ تمارين توليفية	⊗ ساعتان
التوجيهات التربوية	♠ ينبغي تقديم تكامل دالة متصلة على قطعة إنطلاقا من دالة أصلية لدالة متصلة. ♠ تقبل جميع الخاصيات و يمكن تأويلها هندسيا باستعمال المساحة.	
المكتسبات القبلية	♠ الدوال المتصلة. ♠ الدوال الأصلية لدالة متصلة. ♠ حساب مشتقات الدوال العددية.	
الامتدادات	♠ الإحصاء والاحتمالات ♠ العلوم الإقتصادية ♠ العلوم الفيزيائية والكيمائية	

النشاط الأول - تذكير الدوال الأصلية

حدد الدوال الاصلية للدوال التالية على المجال I

$I=\mathbb{R}\ ;\ g(x)=xe^{x^2+1}$ $\qquad$ $I=]1;+\infty[\ ;\ f(x)=\dfrac{1}{x-1}$

$I=\mathbb{R}\ ;\ k(x)=\cos(-2x+1)$ $\qquad$ $I=\mathbb{R}\ ;\ h(x)=xe^{2x^2}$

النشاط الثاني - تعريف التكامل. و خاصياته.

نعتبر الدالة المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ $f(x)=3x^2-x$

أ- حدد دالتين أصليتين F و G لـ f. على المجال $[1,2]$.

ب- تحقق أن $G(2)-G(1)=F(2)-F(1)$

ج- استنتج أنه إذا كانت H دالة أصلية f فإن $H(2)-H(1)=F(2)-F(1)$.

العدد $F(2)-F(1)$ يسمى **تكامل الدالة** f من 1 إلى 2 و يرمز له بالرمز $\int_1^2 f(x)\,dx$

ونكتب $\int_1^2 f(x)dx=[F(x)]_1^2=F(2)-F(1)$

I. تعريف التكامل. و خاصياته.

1- تعريف :

لتكن f دالة متصلة على مجال مفتوح I و a و b عنصرين من I و F دالة أصلية للدالة f على I

العدد الحقيقي $F(b)-F(a)$ يسمى تكامل الدالة f من a إلى b ويرمزله بالرمز $\boxed{\int_a^b f(x)dx=[F(x)]_a^b=F(b)-F(a)}$

ويقرأ" تكامل من a إلى b ل $f(x)dx$ "

ملاحظة :

في الكتابة $\int_a^b f(x)dx$ يمكن تعويض المتغير x بأي متغير آخر إذن $\int_a^b f(x)dx=\int_a^b f(t)dt=\int_a^b f(s)ds=.....$

لدينا :

$$\int_a^a f(t)\,dt = F(a) - F(a) = \boxed{0}.$$

$$\int_a^b f(t)\,dt = F(b) - F(a) = -[F(a) - F(b)] = \boxed{-\int_b^a f(t)\,dt}$$

$$\int_a^c f(t)\,dt+\int_c^b f(t)\,dt = F(c) - F(a) + F(b) - F(c) = F(b) - F(a) = \boxed{\int_a^b f(t)\,dt}$$

$$\int_a^b (f+g)(t)\,dt = (F+G)(b) - (F+G)(a) = F(b)-F(a) + G(b)-G(a) = \boxed{\int_a^b f(t)\,dt+\int_a^b g(t)\,dt}$$

$$\int_a^b (k\times f)(t)\,dt = (k\times F)(b) - (k\times F)(a) = k\times[F(b) - F(a)] = \boxed{k\times\int_a^b f(t)\,dt}$$

2- خاصيات :

- لكل عدد حقيقي k لدينا : $\int_a^b k\ dx=[k\times x]_a^b=k(b-a)$
- لتكن f دالة عددية متصلة على مجال $[a,b]$. لدينا: $\int_a^b f(x)dx=-\int_b^a f(x)dx\ ;\ \int_a^a f(x)dx=0$
- لتكن f دالة قابلة للإشتقاق على المجال $[a,b]$ بحيث f' دالة متصلة على المجال $[a,b]$ فإن: $\int_a^b f'(x)dx=[f(x)]_a^b=f(b)-f(a)$
- لتكن f و g دالتين عدديتين متصلتين على مجال I و a ، b و c عناصر منI و k عدد حقيقي . لدينا:

- علاقة شال $\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx$
- الخطانية: $\begin{cases} \int_a^c (f(x)+g(x))dx = \int_a^b f(x)dx + \int_a^b g(x)dx \\ \int_a^b k\ f(x)dx = k\int_a^b f(x)dx \end{cases}$

3- تطبيقات :

تمرين 1:

أحسب $\int_0^2 2xdx$; $\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \cos x dx$; $\int_1^e \frac{1}{x}dx$

تمرين 2 :

1. أحسب $\int_{-1}^4 |x-1|\, dx$.
2. نعتبر التكاملين : $I = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \cos(x)\cos(3x)dx$ و $I = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \sin(x)\sin(3x)dx$

احسب $I+J$ و $I-J$ ثم استنتج قيمتي I و J .

II. التكامل والترتيب – القيمة المتوسطة

نشـــاط الثالث

1/ لتكن h و k دالتين معرفتين بمايلي $h(x) = 2-x$ و $k(x) = x^2-1$

أ- بين أن الدالة k موجبة على المجال $[-1,1]$ ثم أحسب $\int_{-1}^1 k(x)dx$ مادا تلاحظ ؟

ب- بين أن الدالة h سالبة على المجال $[-1,1]$ ثم أحسب $\int_{-1}^1 h(x)dx$ مادا تلاحظ ؟

2/ لتكن f و g دالتين معرفتين على المجال $[2,3]$ بمايلي $f(x) = x^2+4$ و $g(x) = 5x-2$

قارن الدالتين f و g على المجال $[2,3]$ ثم قارن التكاملين $\int_2^3 f(x)dx$ و $\int_2^3 g(x)dx$

1- خاصية :

لتكن f و g دالتين عدديتين متصلتين على مجال $[a,b]$ بحيث: $a<b$

- إذا كان $f(x) \geq 0$ $(\forall x \in [a,b])$ فإن $\int_a^b f(x)dx \geq 0$.
- إذا كان $f(x) \geq g(x)$ $(\forall x \in [a,b])$ فإن $\int_a^b f(x)dx \geq \int_a^b g(x)dx$.
- لدينا: فإن $\left|\int_a^b f(x)dx\right| \leq \int_a^b |f(x)|dx$.

تطبيق :

1. بين ان $\int_1^2 ln(x^2+1)dx \geq 0$.
2. بين ان $-1 \leq \int_1^2 \frac{\sin(x)}{x}dx \leq 1$.
3. قارن التكاملين $\int_{\frac{1}{2}}^1 xln(x)dx$ و $\int_{\frac{1}{2}}^1 x^2ln(x)dx$.

2- القيمة المتوسطة

لتكن f دالة عددية متصلة على مجال $[a,b]$ حيث $a<b$. يوجد على الأقل عنصر c من $[a,b]$ بحيث:

$f(c)=\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx$.

العدد $\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx$ يسمى **القيمة المتوسطة للدالة** f على $[a,b]$.

تطبيق:

احسب القيمة المتوسطة للدالة f على المجال I في الحالتين:

- $f(x)=\cos(3x)$ و $I=\left[\frac{\pi}{3},\frac{\pi}{2}\right]$.
- $f(x)=\frac{ln^2(x)+x}{x}$ و $I=[1,e]$

III. بعض تقنيات حساب التكامل.

1- استعمال الدوال الأصلية

- قاعدة 1 : $\boxed{\int_a^b u'(t)\times u^r(t)dt=\left[\frac{1}{r+1}u^{r+1}(t)\right]_a^b}$ مع $r\in\mathbb{Q}-\{-1\}$

أحسب التكامل : $J=\int_1^e\frac{\ln x}{x}dx$; $I=\int_0^1\frac{2x+2}{(x^2+2x+1)^2}dx$

- قاعدة 2 : $\boxed{\int_a^b\frac{u'(t)}{u(t)}dt=\left[\ln(|u(t)|)\right]_a^b}$

أحسب التكامل : $I=\int_e^{e^2}\frac{1}{x\ln x}dx$

- قاعدة 3 : $\boxed{\int_a^b u'(t)\times e^{u(t)}dt=\left[e^{u(t)}\right]_a^b}$

أحسب التكامل : $J=\int_{-1}^0(3t^2+1)e^{2t^3+2t}dt$

2- كتابة دالة جذرية كمجموع دوال جذرية

1- حدد ثلاثة أعداد حقيقية a و b و c بحيث : $\forall x\in\mathbb{R}\setminus\{1\}:\frac{x^2}{(x-1)^2}=a+\frac{b}{x-1}+\frac{c}{(x-1)^2}$

2- استنتج التكامل : $\int_{-3}^0\frac{x^2}{(x-1)^2}dx$

3- اخطاط دوال مثلثية

اخطط الحدودية المثلثية $\cos^3x$ ثم احسب $\int_0^{\frac{\pi}{4}}\cos^3(x)dx$.

4- المكاملة بالأجزاء

النشـــاط الرابع

لتكن u و v دالتين متصلتين و قابلتين للإشتقاق على مجال $[a,b]$

1- تحقق من أن $\forall x\in I;u(x)v'(x)=(uv)'(x)-u'(x)v(x)$

2 - إستنتج أن $\int_a^b u(x)v'(x)dx=[u(x)v(x)]_a^b-\int_a^b u'(x)v(x)dx$

خاصية :

لتكن f و g دالتين عدديتين قابلتين للاشتقاق على مجال $[a,b]$ و f' و g' متصلتين على $[a,b]$. لدينا:

$$\int_a^b f'(x)g(x)dx = \left[f(x)g(x)\right]_a^b - \int_a^b f(x)g'(x)dx.$$

مثال: حساب التكامل $I = \int_0^1 xe^x dx$.

ملاحظة هامة: إختيار الدالتين f' و g ليس اعتباطيا. إن حسن اختيارهما له دور أساسي في هذه التقنية.

في المثال السابق إذا كان اختيارنا هو $\begin{cases} f'(x) = x \\ g(x) = e^x \end{cases}$ فإن $\begin{cases} f(x) = \frac{1}{2}x^2 \\ g'(x) = e^x \end{cases}$.

نحصل بالتالي على $\int_0^1 xe^x dx = \left[\frac{1}{2}x^2e^x\right]_0^1 - \int_a^b \frac{1}{2}x^2e^x dx$ و هذا يزيد الحساب تعقيدا و لا نحصل على النتيجة المرجوة بسهولة.

تطبيق:

احسب التكاملات التالية باستعمال تقنية المكاملة بالأجزاء.

$$I = \int_0^{\pi} x\cos x dx \quad ; \quad J = \int_1^e x^2 \ln x dx \quad ; \quad K = \int_2^3 \frac{x}{\sqrt{2x-3}} dx \quad ; \quad L = \int_2^e \ln(x-1) dx$$

ملاحظة: في بعض الأحيان يتعين علينا استخدام المكاملة بالأجزاء مرتين لحساب التكامل.

تطبيق: احسب $\int_0^{\pi} x^2 \cos x dx$.

IV. حساب المساحات والحجوم:

1- حساب المساحات الهندسية

في كل ما يلي المستوى المنسوب إلى معلم متعامد $(O;\vec{i};\vec{j})$.

وحدة قياس المساحات و التي نرمز لها بالرمز $u.a$ هي مساحة المستطيل $OIKJ$ يعني أن $u.a = \|\vec{i}\|\|\vec{j}\|$

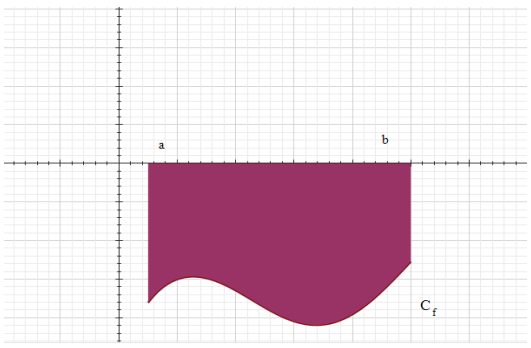
أ- خاصية 1

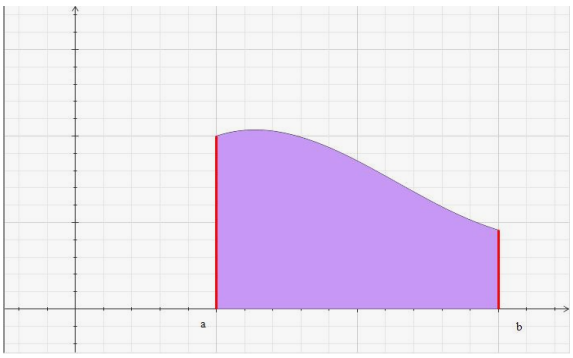
لتكن f دالة متصلة على مجال $[a;b]$.

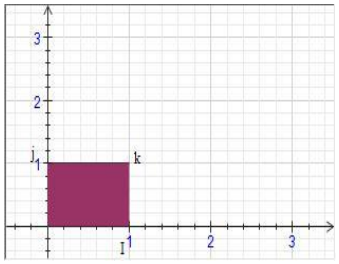
لتكن A مساحة الحيز المحصور بين (C_f) و المستقيمين $(x=a)$ و $(x=b)$ و محور الافاصيل

إذا كانت f موجبة على مجال $[a;b]$ فإن $A = \int_a^b f(x)dx$ بوحدة قياس المساحات.

إذا كانت f سالبة على مجال $[a;b]$ فإن $A = -\int_a^b f(x)dx$ بوحدة قياس المساحات.



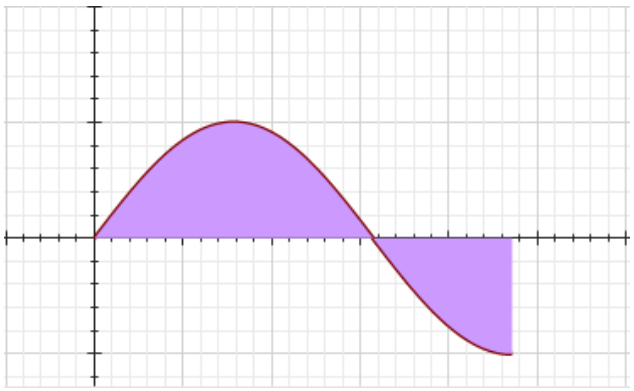




ب- خاصية 2

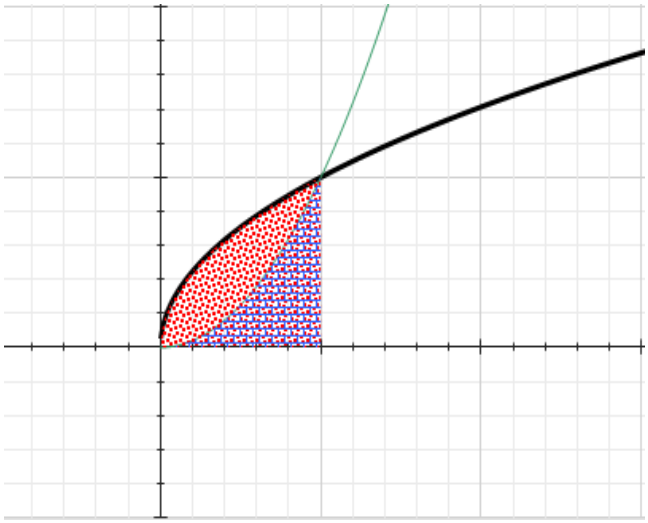
لتكن f دالة متصلة على مجال $[a;b]$.
مساحة الحيز المحصور بين (C_f) و المستقيمين $(x=a)$ و $(x=b)$ و محور الافاصيل
هي العدد الحقيقي الموجب $A=\int_a^b |f(x)|dx$ بوحدة قياس المساحات

تمارين تطبيقية



1-- نعتبر الدالة المعرفة بـ $f(x)=\sin(x)$ على المجال $\left[0;\frac{3\pi}{2}\right]$.
(Δ) السطح المحصور بين (C_f) و المستقيمين $(x=0)$ و $\left(x=\frac{3\pi}{2}\right)$
و محور الافاصيل
أحسب $A(\Delta)$ مساحة الحيز (Δ).

2 -- نعتبر الدالة المعرفة بـ $f(x)=x^2-3x+2$
أحسب $A(\Delta)$ مساحة الحيز (Δ) السطح المحصور بين (C_f) و المستقيمين $(x=0)$ و $(x=2)$ و محور الافاصيل



2- مساحة الحيز المحصور بين منحنيي دالتيين.

أ- مثال تمهيدي

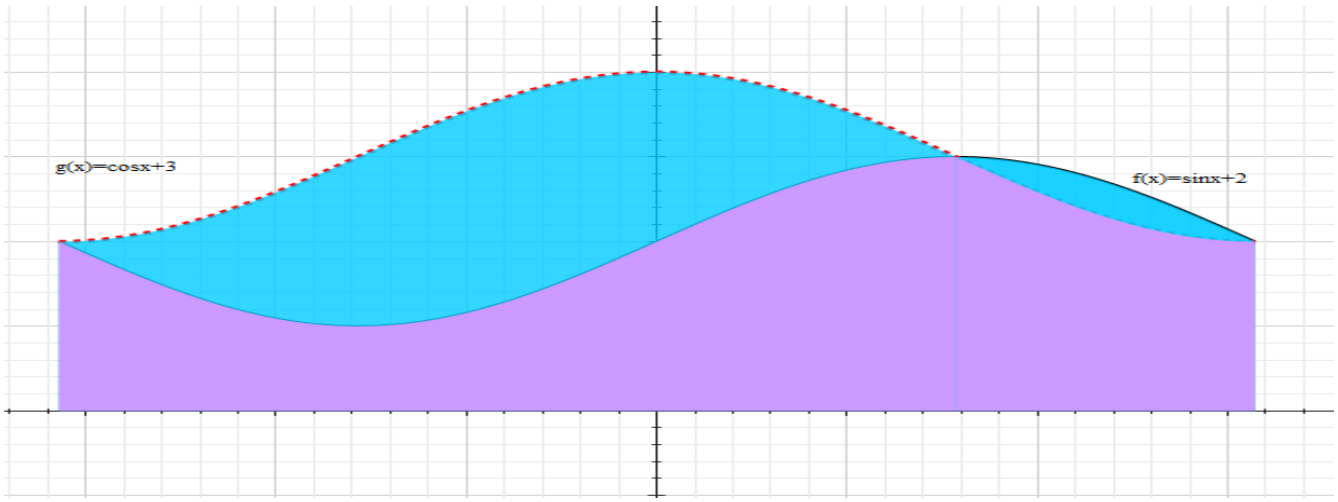
المستوى المنسوب إلى معلم متعامد $(O;\vec{i};\vec{j})$ حيث :
$\|\vec{i}\|=2cm$; $\|\vec{j}\|=2cm$.
نعتبر الدالتين $f(x)=x^2$; $g(x)=\sqrt{x}$: $\forall x\in\mathbb{R}^+$.
و ليكن (C_f) و (C_g) منحنيي الدالتيين f و g على التوالي.
1. أنشئ (C_f) و (C_g)
2. أحسب مساحة الحيز المحصور بين المنحنيين (C_f) و (C_g)
و المستقيمين $(x=0)$ و $(x=1)$

ب- مبرهنة

إذا كانت f و g دالتين متصلتين على المجال $[a;b]$.
فإن مساحة (Δ) الحيز المحصور بين المنحنيين (C_f) و (C_g) و المستقيمين $(x=a)$ و $(x=b)$ هي :
$$A(\Delta)=\int_a^b |f(x)-g(x)|dx\ (u.a)$$

تمرين تطبيقي

نعتبر الشكل التالي . أحسب الحيز المحصور بين المنحنيين (C_f) و (C_g) و المستقيمين $(x=-\pi)$ و $(x=\pi)$.



2- حساب الحجوم

نعتبر في كل ما يلي الفضاء المنسوب إلى معلم متعامد ممنظم $(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k})$.

خاصية 1:

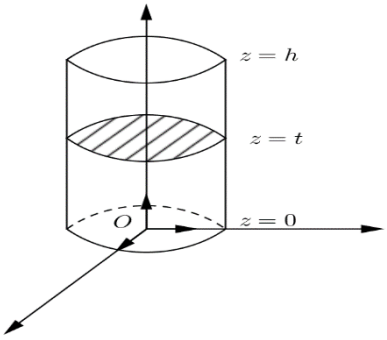
ليكن (Σ) مجسما محصورا بين المستويين $z=a$ و $z=b$ ولتكن $S(t)$ مساحة تقاطع (Σ) مع المستوى $z=t$ $(a\leq t\leq b)$.
إذا كانت $t\longmapsto S(t)$ متصلة على $[,b]$ فإن حجم المجسم (Σ) هو $V=\int_a^b S(t)dt\times\|\vec{i}\|\times\|\vec{j}\|\times\|\vec{k}\|$.

مثال: *مساحة اسطوانة شعاعها R و ارتفاعها h.*

تقاطع المستوى $z=t$ مع الأسطوانة عبارة عن قرص مساحته $S(t)=\pi R^2$.

بما أن $t\longmapsto S(t)$ دالة متصلة على المجال $[0,h]$ فإن حجم هذه الأسطوانة هو:

$$V=\int_0^h S(t)dt=\int_0^h \pi R^2 dt=\pi R^2\int_0^h dt=\pi R^2 h\ cm^3$$



مثال: *حساب حجم كرة.*

لتكن (Γ) كرة مركزها O وشعاعها R.

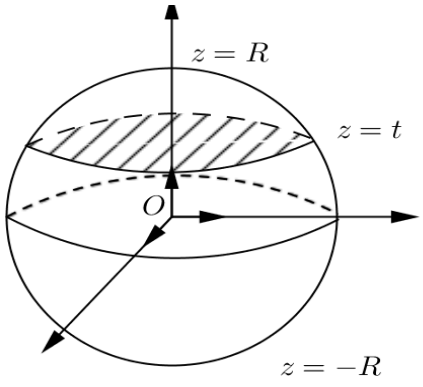
(Γ) *محصورة بين* $z=-R$ و $z=R$ و المستوى $z=t$ يقطع الكرة وفق قرص مساحته $S(t)=\pi r^2$.

لدينا $r^2+t^2=R^2$ إذن $r^2=R^2-t^2$.

و بما أن الدالة $t\longmapsto S(t)=\pi(R^2-t^2)$ متصلة على المجال $[-,R]$ فإن:

حجم (Γ) هو:

$$V=\int_{-R}^{R} S(t)dt=\int_{-R}^{R}\pi(R^2-t^2)dt=\frac{4}{3}\pi R^3\ cm^3$$



خاصية 2:

لتكن f *دالة عددية متصلة على مجال* $[a,b]$ *حيث* $a<b$.

حجم المجسم المولد بدوران منحنى الدالة حول محور الأفاصيل هو: $V=\int_a^b \pi(f(x))^2dx$ *بوحدة قياس الحجوم.*

مجسم الدوران محصور بين مستويين $z=a$ و $z=b$. المستوى $z=x$ ويقطع مجسم الدوران وفق قرص شعاعه $f(x)$.

مساحة القرص هي $S(x)=\pi(f(x))^2$ ومنه $V=\int_a^b \pi(f(x))^2dx$ *بوحدة قياس الحجوم.*

ملاحظات	المحتوى
	I. الجداء السلمي في الفضاء وتطبيقاته: *Produit scalaire dans l'espace et application*
	في هذا الدرس ننسب الفضاء $(\mathcal{E})$ إلى معلم متعامد ممنظم $(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k})$.
	1. التمثيل البارامتري لمستقيم:
	• نعتبر المستقيم (D) المار من النقطة $A(x_A,y_A,z_A)$ و الموجه بالمتجهة $\vec{u}(a,b,c)$.
	$M(x,y,z)\in(D) \Leftrightarrow (\exists t\in\mathbb{R}): \overrightarrow{AM}=t\vec{u}$
	$\Leftrightarrow \begin{cases} x-x_A=at \\ y-y_A=bt/t\in\mathbb{R} \\ z-z_A=ct \end{cases}$
	$\Leftrightarrow \begin{cases} x=x_A+at \\ y=y_A+bt/t\in\mathbb{R} \\ z=z_A+ct \end{cases}$
	هذه النظمة تسمى تمثيلا بارامتريا للمستقيم (D).
	❍ مثال:
	$\vec{u}(2,4,5)$ و $A(-1,2,3)$:
	$D(A,\vec{u}): \begin{cases} x=-1+2t \\ y=2+4t/t\in\mathbb{R} \\ z=3+5t \end{cases}$.
	❍ عكسيا:
	نعتبر المستقيم (D) المعرف بتمثيله البارامتري: $(D): \begin{cases} x=1-t \\ y=2 \quad /t\in\mathbb{R} \\ z=-3t \end{cases}$
	المستقيم (D) يمر من $(1,2,0)$ وموجه بالمتجهة $\vec{u}(-1,0,-3)$.
	• نعتبر المستقيم (D) المار من $A(x_A,y_A,z_A)$ و الموجه بالمتجهة $\vec{u}(a,b,c)$ حيث $a\neq 0$ و $b\neq 0$ و $c\neq 0$
	$\frac{x-x_A}{a}=\frac{x-y_A}{b}=\frac{x-z_A}{c}$
	لدينا معادلتين ديكارتيتين للمستقيم (D).
	✍ تطبيق:
	أعط التمثيل البارامتري ثم المعادلتين الديكارتيتين للمستقيم المار من النقطتين $A(1,2,3)$ و $B(3,2,1)$.
	2. المستوى في الفضاء:
	نعتبر في الفضاء النقطة $A(x_A,y_A,z_A)$ و المتجهتين $\vec{u}(a,b,c)$ و $\vec{v}(a',b',c')$.
	المستوى المار من النقطة و الموجه ب $\vec{u}$ و $\vec{v}$.
	لتكن (x,y,z) نقطة من (P). المتجهات $\overrightarrow{AM}$ و $\vec{u}$ و $\vec{v}$ متجهات مستوائية:
	$\overrightarrow{AM}=t\vec{u}+t'\vec{v}/\ t,t'\in\mathbb{R}$
	$\Leftrightarrow \begin{cases} x-x_A=at+a't' \\ y-y_A=bt+b't'/t,t'\in\mathbb{R} \\ z-z_A=ct+c't' \end{cases}$
	$\Leftrightarrow \begin{cases} x=x_A+at+a't' \\ y=y_A+bt+b't'/t,t'\in\mathbb{R} \\ z=z_A+ct+c't' \end{cases}$
ذ. لطرش عبد الكبير	**❍ مثال:**

$$(P):\begin{cases} x = -t \\ y = -1 - t + t'/t, t' \in \mathbb{R} \\ z = 5 + 2t + 3t' \end{cases}$$

(P) يمر من النقطة $A(0,-1,5)$ و المتجهتين $\vec{u}(-1,-1,2)$ و $\vec{v}(0,1,3)$.

تطبيق:

نعتبر النقط $A(2,2,2)$ ، $B(0,-1,1)$ و $C(1,-2,1)$.

1. حدد تمثيلا بارامتريا للمستوى (ABC).
2. اعط المعادلة الديكارتية للمستوى (ABC).

3. الجداء السلمي في الفضاء:

تعريف:

لتكن $\vec{u}$ و $\vec{v}$ متجهتين من الفضاء، A و B و C ثلاث نقط من الفضاء بحيث: $\vec{u} = \overrightarrow{AB}$ و $\vec{v} = \overrightarrow{AC}$.
الجداء السلمي للمتجهتين $\vec{u}$ و $\vec{v}$ في الفضاء هو الجداء السلمي $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}$ في المستوى (P) ونرمز له بالرمز: $\vec{u}.\vec{v}$

ملاحظة:

جميع خاصيات الجداء السلمي في المستوى تمدد إلى الفضاء.

نتائج:

- إذا كانت $\vec{u}$ و $\vec{v}$ متجهتين غير منعدمتين فإن: $\vec{u}.\vec{v} = \|\vec{u}\| \times \|\vec{v}\| \times \cos(\vec{u},\vec{v})$.
- تكون المتجهتان $\vec{u}$ و $\vec{v}$ متعامدتان إذا وفقط إذا كان: $\vec{u}.\vec{v} = 0$
- الجداء السلمي $\vec{u}.\vec{u}$ يرمز له بالرمز $\vec{u}^2$ ويسمى المربع السلمي للمتجهة $\vec{u}$.

خاصية:

لتكن $\vec{u}$ و $\vec{v}$ و $\vec{w}$ ثلاث متجهات من الفضاء و k عددا حقيقيا، لدينا:

- $\vec{u}.\vec{v} = \vec{v}.\vec{u}$
- $(k\vec{u}).\vec{v} = k(\vec{u}.\vec{v})$
- $\vec{u}.(\vec{v} + \vec{w}) = \vec{u}.\vec{v} + \vec{u}.\vec{w}$
- $(\vec{u} + \vec{v})^2 = \vec{u}^2 + 2\vec{u}.\vec{v} + \vec{v}^2$

4. الصيغة التحليلية للجداء السلمي في معلم متعامد ممنظم:

خاصية:

إذا كانت $\vec{u} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$ و $\vec{v} = x'\vec{i} + y'\vec{j} + z'\vec{k}$ متجهتين من الفضاء فإن: $\vec{u}.\vec{v} = xx' + yy' + zz'$

نتائج:

- منظم متجهة:

إذا كانت $\vec{u} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$ فإن منظم المتجهة $\vec{u}$ هو: $\|\vec{u}\| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$

- المسافة بين نقطتين:

إذا كان $A(x_A, y_A, z_A)$ و $B(x_B, y_B, z_B)$ نقطتين من الفضاء، فإن:

$$AB = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2 + (z_B - z_A)^2}$$

ذ. لطرش عبد الكبير

تطبيق:

لتكن $A(1,1,\sqrt{2})$ و $B(\sqrt{2},-\sqrt{2},0)$ و $C(-1,-1,-\sqrt{2})$ ثلاث نقط من الفضاء.

احسب AB و BC و $\overrightarrow{BA}.\overrightarrow{BC}$ ثم استنتج طبيعة المثلث ABC.

5. تطبيقات الجداء السلمي في الفضاء:

أ. تعامد مستقيمين في الفضاء:

خاصية:

ليكن (D_1) مستقيم موجه ب $\vec{u}_1$ و (D_2)موجه ب $\vec{u}_2$.

$(D_1) \perp (D_2)$ إذا وفقط إذا كان $\vec{u}_1 \perp \vec{u}_2$.

تطبيق:

بين أن $(D_1) \perp (D_2)$ في الحالتين:

- (D_1) موجه بالمتجهة $\vec{u}(1,2,3)$ و (D_2) معرف بتمثيله البارامتري التالي: $\begin{cases} x = 1+4t \\ y = 2-2t \quad /t \in \mathbb{R} \\ z = 5t \end{cases}$.
- (D_1) معرف بالمعادلتين الديكارتيتين $x-2 = \frac{y+1}{2} = \frac{5-z}{2}$ و (D_2) معرف بتمثيله البارامتري التالي: $\begin{cases} x = 3+2t \\ y = 5-3t \quad /t \in \mathbb{R} \\ z = -2-2t \end{cases}$.

ب. مستوى محدد بنقطة ومتجهة منظمية عليه:

لتكن $\vec{n}(a,b,c)$ متجهة غير منعدمة و $A(x_A,y_A,z_A)$ نقطة من الفضاء $(\mathcal{E})$.

يوجد مستوى وحيد (P) يمر من A و $\vec{n}$ منظمية عليه (أي أن اتجاهها عمودي على المستوى (P)).

$$M(x,y,z) \in (P) \Leftrightarrow \overrightarrow{AM} \perp \vec{n} \Leftrightarrow \overrightarrow{AM}.\vec{n} = 0$$

مثال:

لنحدد معادلة ديكارتية للمستوى (P) المار من النقطة $A(1,-2,3)$ و $\vec{n}(1,-3,-2)$.

لتكن $M(,y,z)$ نقطة من (P). لدينا $\overrightarrow{AM}(x-1,y+2,z-3)$:

ولدينا: $\overrightarrow{AM}.\vec{n} = 0 \Leftrightarrow (x-1)-3(y+2)-2(z-3) = 0$

$$\Leftrightarrow x-3y-2z-1 = 0$$

⊗ طريقة ②:

معادلة (P) تكتب على شكل $x-3y-2z+d=0$.

بما أن $A \in (P)$ فإن $1-3(-2)-2(3)+d=0$ ومنه $d=-1$.

وبالتالي $(P): x-3y-2z-1=0$

تطبيق:

1. حدد المعادلة الديكارتية للمستوى (P) المار من النقطة A والمتجهة $\vec{n}$ منظمية عليه في كل حالة من الحالات التالية:
   - $A(1,0,5)$ و $\vec{n}(-1,1,0)$
   - $A(\sqrt{2},-2,5)$ و $\vec{n}(2,-3,-1)$.
2. حدد المعادلة الديكارتية للمستوى (P) المار من النقطة $A(4,1,0)$ وعمودي على المستقيم (D) المعرف بتمثيله البارامتري التالي:

ذ. لطرش عبد الكبير

$$\begin{cases} x = 2 - 3t \\ y = -3 + t \quad /t \in \mathbb{R} \\ z = 4 - 2t \end{cases}$$

ج. تعامد مستويين في الفضاء:

خاصية:

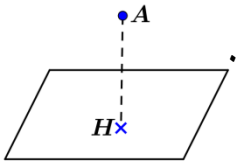
ليكن (P) و (Q) مستويين في الفضاء ولتكن $\vec{n}_{(P)}$ منظمية على (P) و $\vec{n}_{(Q)}$ منظمية على (Q).
$(Q) \perp (P)$ إذا وفقط إذا كان $\vec{n}_{(Q)} \perp \vec{n}_{(P)}$.

تطبيق:

أدرس تعامد المستويين (P) و(Q) في الحالات التالية:

- $(P): 2x + z - 1 = 0$ و $(Q): x - 2y - 2z + 1 = 0$.
- $(P): x - y - 4z + 1 = 0$ و $(Q): 4x - y - 2z - 3 = 0$.

6. مسافة نقطة عن مستوى:



ليكن (P) مستوى و A نقطة من الفضاء و H المسقط العمودي للنقطة A على المستوى (P).
المسافة AH تسمى مسافة النقطة A عن المستوى (P) ويرمز لها بالرمز $d(A,(P))$

خاصية:

ليكن (P) مستوى معادلته $ax+by+cz+d=0$ و $A(x_A, y_A, z_A)$ نقطة من الفضاء.
مسافة النقطة A عن المستوى (P) هي: $d(A,(P)) = \dfrac{|ax_A + by_A + cz_A + d|}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}$

مثال:

لنحسب مسافة النقطة $A(1,-1,2)$ عن المستوى (P)ذو المعادلة الديكارتية $(P): 2x + y - z + 1 = 0$.
لدينا $\vec{n}(2,1,-1)$ متجهة منظمية على (P).
إذن: $d(A,(P)) = \frac{|2\times1-1-2+1|}{\sqrt{2^2+1^2+(-1)^2}} = 0$. نستنتج أن $A \in (P)$.

تطبيق:

نعتبر المستوى (P) ذو المعادلة الديكارتية: $(P): x + y + z + 1 = 0$ و $A(1,2,0)$ نقطة من الفضاء.

1. أحسب $d(A,(P))$.
2. حدد تمثيلا بارامتريا للمستقيم (D) المار من A و العمودي على (P).
3. حدد احداثيات النقطة H المسقط العمودي لـA على (P).

II. الفلكة: la sphère

1. تعريف- المعادلة الديكارتية للفلكة:

الفلكة (S) التي مركزها $\Omega(a,b,c)$ وشعاعها R هي مجموعة النقط M من الفضاء التي مسافتها عن النقطة Ω تساوي الشعاع R ونرمز لهذه الفلكة بالرمز $S(\Omega,R)$.

لدينا: $M(x,y,z) \in (S) \Leftrightarrow \Omega M = R$

$$\Leftrightarrow \Omega M^2 = R^2$$
$$\Leftrightarrow (x-a)^2 + (y-b)^2 + (z-c)^2 = R^2$$
$$\Leftrightarrow x^2 + y^2 + z^2 - 2ax - 2by - 2cz + a^2 + b^2 + c^2 = R^2$$

ذ. لطرش عبد الكبير

هذه المعادلة تسمى معادلة ديكارتية للفلكة (S).

تطبيق:

1. حدد معادلة ديكارتية للفلكة (S) التي مركزها $\Omega(2,0,1)$ وشعاعها $R=\sqrt{2}$.
2. حدد معادلة ديكارتية للفلكة (S) التي مركزها $\Omega(1,-1,2)$ وتمر من النقطة $A(-1,4,5)$.
3. حدد معادلة ديكارتية للفلكة (S) التي أحد أقطارها $[AB]$ بحيث $A(-1,0,3)$ وتمر من النقطة $B(2,5,4)$.

2. تحديد مركز وشعاع فلكة:

لنحدد مركز وشعاع الفلكة (S) ذات المعادلة $(S): x^2+y^2+z^2-2z+3z+2=0$.

لدينا: $x^2+y^2+z^2-2y+3z+2=0 \Leftrightarrow x^2+y^2-2y+z^2+3z+2=0$.

$$\Leftrightarrow (x-0)^2+(y-1)^2-1++(z+\frac{3}{2})^2-\frac{9}{4}+2=0$$

$$\Leftrightarrow (x-0)^2+(y-1)^2+(z+\frac{3}{2})^2=\left(\frac{\sqrt{5}}{2}\right)^2$$

ومنه (S) عبارة عن فلكة شعاعها $R=\frac{\sqrt{5}}{2}$ ومركزها $\Omega(0,1,-\frac{3}{2})$.

تطبيق:

حدد مجموعة النقط $M(x,y,z)$ من الفضاء في كل من الحالات التالية:

1- $x^2+y^2+z^2-4x-6y=0$

2- $x^2+y^2+z^2-4x+2y+2z+19=0$

3- $x^2+y^2+z^2+4y-2z+5=0$

3. تمثيل بارامتري لفلكة:

لتكن (S) فلكة مركزها $\Omega(a,b,c)$ وشعاعها R و $M(x,y,z)$ نقطة من الفضاء.

$$M(x,y,z)\in(S) \Leftrightarrow \begin{cases} x=a+R\sin\varphi\cos\theta \\ y=b+R\sin\varphi\sin\theta \,/\, (\varphi,\theta)\in\mathbb{R}^2 \\ z=c+R\cos\varphi \end{cases}$$

هذه النظمة تسمى تمثيلا بارامتريا للفلكة (S).

تطبيق:

حدد تمثيلا بارامتريا للفلكة (S) التي معادلتها الديكارتية: $x^2+y^2+z^2=1$

4. الأوضاع النسبية: لفلكة ومستوى- لفلكة ومستقيم:

أ. الوضع النسبي لفلكة ومستوى:

نعتبر مستوى (P) وفلكة (S). يتحدد الوضع النسبي ل (P) و (S) بحساب المسافة: $d=d(\Omega,(P))$.

- إذا كان $d<R$: تقاطع (P) و (S) عبارة عن دائرة مركزها H المسقط العمودي ل Ω على (P) وشعاعها $r=\sqrt{R^2-d^2}$.
- إذا كان $d=R$: (P) مماس (S) في النقطة H المسقط العمودي ل Ω على (P).
- إذا كان $d>R$: تقاطع (P) و (S) عبارة عن مجموعة فارغة.

تطبيق:

ذ. لطرش عبد الكبير

نعتبر المجموعة : $(S):\{M(x,y,z)/x^2+y^2+z^2+2x-2y+2z-1=0\}$

1. بين أن (S) فلكة محددا كل من المركز Ω والشعاع R.
2. أدرس الوضع النسبي ل (S) و المستويات التالية:

$(P_1):2x+y+2z-3=0$ و $(P_2):x-2y+2z+3=0$ و $(P_1):x+2y-z+9=0$

ب. الوضع النسبي لفلكة ومستقيم:

الوضع النسبي لفلكة ومستقيم إما أن يكون عبارة عن نقطتين أو نقطة أو مجموعة فارغة.

تمرين:

حدد تقاطع المستقيم (D) المعرف بتمثيله البارامتري التالي: $(D):\begin{cases} x=t \\ y=1+t \ / t\in\mathbb{R} \\ z=2+t \end{cases}$ مع كل من الفلكتين

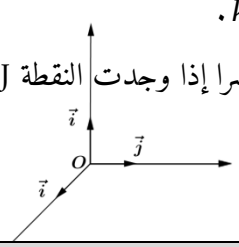
$(S_1):x^2+y^2+z^2+2x=0$ و $(S_2):x^2+y^2+z^2-2x-2y-6z+\frac{31}{3}=0$.

III. الجداء المتجهي:

1. تعريف:

ننسب الفضاء $(\mathcal{E})$ إلى معلم متعامد ممنظم $(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ و $\vec{i}=\overrightarrow{OI}$ و $\vec{j}=\overrightarrow{OJ}$ و $\vec{k}=\overrightarrow{OK}$.

رجل أمبير رجل خيالي رأسه في النقطة O وينظر إلى النقطة I، نقول إن المعلم $(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ مباشرا إذا وجدت النقطة J على يساره.



تعريف:

$\vec{u}$ و $\vec{v}$ متجهتين غير منعدمتين بحيث $\vec{u}=\overrightarrow{OA}$ و $\vec{v}=\overrightarrow{OB}$، الجداء المتجهي ل $\vec{u}$ و $\vec{v}$ هو المتجهة التي نرمز لها بالرمز $\vec{u}\wedge\vec{v}$ و المعرفة بما يلي:

- إذا كانت $\vec{u}$ و $\vec{v}$ مستقيميتين فإن $\vec{u}\wedge\vec{v}=\vec{0}$.
- إذا كانت $\vec{u}$ و $\vec{v}$ غير مستقيميتين فإن $\vec{u}\wedge\vec{v}=\vec{w}$ بحيث $\vec{w}\perp\vec{u}$ و $\vec{w}\perp\vec{v}$.
- الأساس $(\vec{u},\vec{v},\vec{u}\wedge\vec{v})$ أساس مباشر.
- $\|\vec{u}\wedge\vec{v}\|=\|\vec{u}\|\|\vec{v}\|\sin(\theta)$ حيث θ قياس للزاوية الهندسية $\widehat{AO}$.

خاصية:

- $\vec{u}\wedge\vec{v}=-\vec{v}\wedge\vec{u}$
- $\vec{u}\wedge(\vec{v}+\vec{w})=\vec{u}\wedge\vec{v}+\vec{v}\wedge\vec{w}$
- $(\alpha\in\mathbb{R})\ (\alpha\vec{u})\wedge\vec{v}=\alpha(\vec{u}\wedge\vec{v})$

2. الصيغة التحليلية للجداء لمتجهي:

ننسب الفضاء $(\mathcal{E})$ إلى معلم متعامد ممنظم مباشر $(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k})$.

نضع $\vec{u}(a,b,c)$ و $\vec{v}(a',b',c')$. لدينا:

$$\vec{u}\wedge\vec{v}=\begin{vmatrix} b & b' \\ c & c' \end{vmatrix}\vec{i}-\begin{vmatrix} a & a' \\ c & c' \end{vmatrix}\vec{j}+\begin{vmatrix} a & a' \\ b & b' \end{vmatrix}\vec{k}$$

مثال:

لنحسب الجداء المتجهي للمتجهتين $\vec{u}(0,1,-2)$ و $\vec{v}(-3,1,2)$.

$$\vec{u}\wedge\vec{v}=\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -2 & 2 \end{vmatrix}\vec{i}-\begin{vmatrix} 0 & -3 \\ -2 & 2 \end{vmatrix}\vec{j}+\begin{vmatrix} 0 & -3 \\ 1 & 1 \end{vmatrix}\vec{k}=4\vec{i}+6\vec{j}+3\vec{k}$$

ذ. لطرش عبد الكبير

3. تطبيقات الجداء المتجهي:

أ. معادلة مستوى معرف بثلاث نقط غير مستقيمية:

إذا كان $\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC} \neq \vec{0}$ فإن النقط A،B وC غير مستقيمية، وبالتالي تكون مستوى $\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC}$ متجهة منظمية عليه.

تطبيق:

نعتبر النقط $A(2,4,-5)$ و $B(1,0,4)$ و $C(0,3,1)$.

1) تحقق من أن النقط A و B و C غير مستقيمية.

2) حدد معادلة ديكارتية للمستوى (ABC).

ب. مساحة مثلث:

خاصية:

لتكن A و B و C غير مستقيمية من الفضاء. مساحة المثلث ABC هي: $S_{ABC} = \frac{1}{2}\|\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC}\|$.

مساحة متوازي الأضلاع $ABCD$ هي: $S_{ABC} = \|\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC}\|$.

تطبيق:

نعتبر النقط $A(-1,2,0)$ و $B(3,0,4)$ و $C(-2,1,2)$.

1) تحقق من أن النقط A و B و C غير مستقيمية.

2) حدد مساحة المثلث ABC.

ج. مسافة نقطة عن مستقيم:

ليكن (D) مستقيم يمر من نقطة A وموجه بالمتجهة $\vec{u}$. مسافة نقطة M عن المستقيم (D) هي المسافة MH حيث H المسقط العمودي لـM على المستقيم (D).

لتحديد احداثيات النقطة H نستعمل الشرطين التاليين: $H \in (D)$ و $\overrightarrow{MH}.\vec{u} = 0$.

نرمز لهذه المسافة ب $d(M,D(A,\vec{u}))$.

خاصية:

$$d(M,D(A,\vec{u})) = \frac{\|\overrightarrow{AM} \wedge \vec{u}\|}{\|\vec{u}\|}$$

تطبيق:

1. أحسب مسافة النقطة $M(3,2,1)$ عن المستقيم (D) بحيث: $(D):\begin{cases} x = 1+t \\ y = 1/t \in \mathbb{R} \\ z = -t \end{cases}$.

2. أ) أحسب مسافة النقطة $M(-1,2,0)$ عن المستقيم (D) بحيث: $(D):\begin{cases} x - y = 1 \\ y + z = 2 \end{cases}$.

ب) حدد إحداثيات المسقط العمودي ل M على المستقيم (D).

د. تقاطع مستويين:

ليكن (P) و (Q) مستويين في الفضاء ولتكن $\vec{n}_{(P)}$ منظمية على (P) و $\vec{n}_{(Q)}$ منظمية على (Q).

إذا كان $\vec{n}_{(P)} \wedge \vec{n}_{(Q)} \neq \vec{0}$ فإن (P) و(Q) وفق مستقيم (D) موجه بالمتجهة $\vec{n}_{(P)} \wedge \vec{n}_{(Q)}$.

تطبيق:

ذ. لطرش عبد الكبير

نعتبر $(P): 2x + z - 1 = 0$ و $(Q): x - 2y - 2z + 1 = 0$. تحقق أن (P) و (Q) مستويين متاقطعان وفق مستقيم ينبغي تحديد متجهة موجهة له. حدد تمثيلا بارامتريا لهذا المستقيم.	

ذ. لطرش عبد الكبير

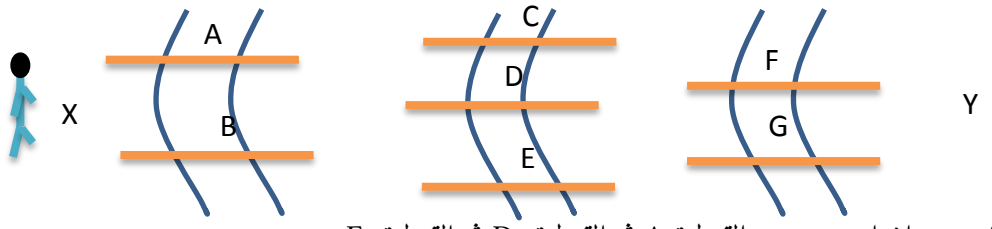
ملاحظات	المحتوى

I. التعداد: Dénombrement

1. المبدأ الأساسي للتعداد

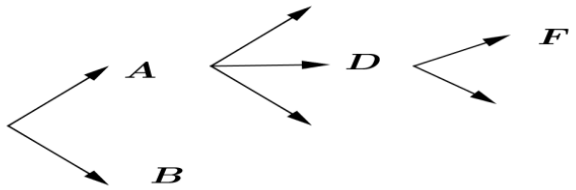
نشاط:

يريد احمد الوصول الى النقطة Y انطلاقا من النقطة X عبر المرور من ثلاثة اودية كما هو موضح في الشكل ادناه:



الكتابة ADF تعني ان احمد مر من القنطرة A ثم القنطرة D ثم القنطرة F.

1) اتمم الشجرة التالية، ثم استنتج E مجموعة الطرق المؤدية الى النقطة Y .



2) أحسب عدد السبل التي يمكن ان يسلكها أحمد للوصول للنقطة Y.

تعريف:

ليكن p اختيارا.

اذا كان الاختيار الاول يتم ب n_1 كيفية مختلفة ، وكان الاختيار الثاني يتم ب n_2 كيفية مختلفة،... وكان الاختيار p تيم ب n_p كيفية مختلفة فان عدد الكيفيات التي تتم به هذه الاختيارات كلها هو:

$$n = n_1 \times n_2 \times \dots \times n_p$$

مثال:

نعتبر الأحرف "BAC".

نريد معرفة عدد الكلمات التي يمكن تكوينها من الاحرف السابقة بدون تكرار الحرف .

- عدد امكانيات اختيار الحرف الأول هي: 3
- عدد امكانيات اختيار الحرف الثاني هي: 2
- عدد امكانيات اختيار الحرف الثالث هي: 1

وبالتالي عدد الكلمات التي يمكن تكوينها من الاحرف السابقة هي: $3 \times 2 \times 1 = 6$.

تطبيق:

يمتلك احد الاشخاص ثلاثة اقمصة و ربطتي عنق وثلاثة سراويل.

كم هي عدد البدلات التي يمكن ان يلبسها هذا الشخص؟ (كل بدلة مكونة من قميص و ربطة عنق وسروال)

تمرين:

يحتوي صندوق على خمس كرات حمراء وثلاث كرات بيضاء. نسحب بالتتابع وبدون احلال كرتين من الصندوق.

1) أنشئ شجرة الاختيارات.

2) أحسب عدد السحبات المكونة من كرتين من نفس اللون.

ذ.لطرش عبد الكبير

3) أحسب عدد السحبات المكونة من كرتين مختلفتي اللون.

2. الترتيبات:

أ. الترتيبات بدون تكرار

نشاط:

تريد لجنة لاختيار أعمال أدبية، ترتيب 3 كتب من بين 10 المعروضة عليهم.

1) حدد عدد الترتيبات الممكنة .
2) ما هو عدد هذه الترتيبات إذا هم الترتيب 4 كتب عوض 3 كتب؟
3) ما هو عدد الترتيبات إذا هم الترتيب 10 كتب كاملة؟

تعاريف:

ليكن n وp عنصرين من $\mathbb{N}^*$ بحيث $(p \leq n)$.

- كل ترتيب ل p عنصر من بين n (مع عدم إمكانية تكرار نفس العنصر) تسمى ترتيبة ل p عنصر من بين n عنصر، ونرمز لها بالرمز: A_n^p.
- كل ترتيب ل n عنصر من بين n (مع عدم إمكانية تكرار نفس العنصر) تسمى تبديلة ل n عنصر ، ونرمز لها بالرمز: $n!$ وتقرأ "عاملي n".

اصطلاحا: $0! = 1$.

تطبيق:

1) أحسب الأعداد التالية: A_6^3 ، A_4^2 ، $3!$ و $5!$.
2) قارن A_7^5 و $\frac{7!}{(7-5)!}$.

ملاحظة:

ليكن n وp عنصرين من $\mathbb{N}^*$ بحيث $(p \leq n)$ $A_n^p = n(n-1)(n-2)\dots(n-p+1) = \frac{n!}{(n-p)!}$

تطبيق:

يريد اربعة أشخاص الجلوس على مائدة مستديرة تضم سبعة كراسي.

1) بكم من كيفية يمكن ان يجلس هؤلاء الاشخاص؟
2) إذا علمت أن ثلاثة كراسي من الكراسي السابقة مكسورة، بكم من كيفية يمكن أن يجلس هؤلاء الأشخاص؟

تمرين:

يحتوي صندوق على أربعة كرات بيضاء وثلاث كرات صفراء وكرة واحدة سوداء. نسحب بالتتابع وبدون احلال ثلاث كرات من الصندوق.

ماهي عدد السحبات الممكنة؟

ب. الترتيبات بتكرار:

نشاط:

يحتوي صندوق على ثلاث كرات حمراء و كرتين بيضاوتين. نسحب بالتتابع و بإحلال كرتين من الصندوق.

1) أنشئ شجرة الاختيارات.
2) ماهي عدد السحبات الممكنة؟

خاصية:

ليكن n وp عنصرين من $\mathbb{N}^*$ بحيث $(p \leq n)$.
عدد الترتيبات بتكرار ل p من بين n هي: n^p.

تمرين:

لتكن الأرقام التالية : 2 - 3 - 5 - 7- 8.

1) كم من عدد من ثلاثة ارقام مختلفة مثنى مثنى يمكن تكوينه انطلاقا من الأرقام السابقة ؟
2) كم من عدد من ثلاثة ارقام ليست بالضرورة مختلفة يمكن تكوينه انطلاقا من الأرقام السابقة ؟

3. ***التأليفات :***

نشاط:

تتكون مجموعة من أربعة أشخاص $E = \{a\,;b;c;d\}$.

نريد تكون لجنة مكونة من ثلاثة أشخاص لتأدية مهمة ما.

ماهي اللجن التي يمكن تكوينها وما هو عددها؟

1. احسب $\frac{A_4^3}{3!}$. ماذا تستنتج؟

خاصية:

لتكن E مجموعة تحتوي على n عنصر و p عدد صحيح طبيعي بحيث $(p \leq n)$.
كل جزء من E يحتوي على p عنصر يسمى تأليفة ل p عنصر من بين n. عدد هذه التأليفات هو $\frac{A_n^p}{p!}$ ونرمز له ب C_n^P.

تطبيق:

احسب ما يلي: C_6^4 و C_9^5 و C_4^2.

ملاحظة:

ليكن n وp عنصرين من $\mathbb{N}^*$ بحيث $(p \leq n)$ لدينا: $C_n^P = \frac{n!}{p!(n-p)!}$

تطبيق:

يتكون قسم من *4* إناث و*6* ذكور ، نريد اختيار 5 تلاميذ من بين تلاميذ هذا القسم لتمثيله في إحدى الأنشطة المدرسية.

1) حدد عدد المجموعات التي يمكن تكوينها.
2) حدد عدد المجموعات التي تتكون من الذكور فقط.
3) حدد عدد المجموعات التي تحتوي على بنتين فقط.
4) حدد عدد المجموعات التي تحتوي على 3 ذكور على الأقل.

تمرين:

يحتوي صندوق على اربعة كرات حمراء و ثلاث كرات خضراء. نسحب في ان واحد ثلاث كرات من الصندوق.

1. ما هو عدد السحبات الممكنة؟
2. ما هو عدد السحبات التي تحتوي على كرة واحدة حمراء؟
3. ما هو عدد السحبات التي تحتوي كرتين حمراوين على الاكثر؟

❍ خلاصة:

نسحب p عنصر من بين n .

نوع السحب	عدد السحبات الممكنة	الترتيب
اني	C_n^p	غير مهم
بالتتابع و بإحلال	n^p	مهم
بالتتابع و بدون احلال	A_n^p	مهم

4. أهمية الترتيب:

خاصية:

إذا كانp عدد الكرات المسحوبة حيث:

p_1 عدد كرات النوع الأول.

p_2 عدد كرات النوع الثاني.

p_3 عدد كرات النوع الثالث.

فإن معامل الترتيب هو $\frac{p!}{p_1!\times p_2!\times p_3!}$.

تمرين:

يحتوي صندوق على ثلاث كرات خضراء وخمس كرات حمراء. نسحب عشوائيا أربع كرات من الصندوق بالتتابع وبدون إحلال.

1) حدد عدد السحبات الممكنة.
2) حدد عدد السحابات التي تكون فيها الكرات الثلاثة الأولى خضراء.
3) حدد عدد السحبات التي تكون فيها الكرة الأولى خضراء.
4) حدد عدد السحبات التي تحتوي على كرة واحدة خضراء.
5) حدد السحبات التي تضم كرتين حمراوين فقط.

II. التجارب العشوائية - احتمال حدث:

1. مصطلحات:

تمهيد:

إذا رمينا قطعة نقدية في الهواء فلا يمكن أن نعلم مسبقا هل ستقع على الوجه «F» أو على الظهر «P». نقول إن "رمي قطعة نقدية في الهواء" تجربة عشوائية.

نشاط:

نرمي نردا مكعبا غير مغشوش مرقم الأوجه من 1 الى 6. نهتم بالوجه الأعلى للنرد عندما يستقر.

1. حدد المجموعة Ω المكونة من جميع الامكانيات الممكنة.
2. حدد المجموعة A المكونة من جميع امكانيات الحصول على عدد زوجي.

المجموعة A تسمى حدثا.

3. حدد بالتفصيل الاحداث التالية:

- الحدث B:" الحصول على عدد فردي".
- الحدث C:" الحصول على عدد مضاعف للعدد 3".
- الحدث D:" الحصول على عدد قابل للقسمة على 5".
- الحدث E:" الحصول على عدد اكبر قطعا من 6".

4. عبر عن الأحداث $A \cap C$ و $A \cup B$ و $A \cap B$ ثم حددها بتفصيل.

تعاريف:

نعتبر تجربة عشوائية.

- نسمي كون امكانيات تجربة عشوائية, مجموعة نتائج هذه التجربة العشوائية و نرمز لها ب Ω
- كل مجموعة مكونة من إمكانية او أكثر تسمى حدثا.
- Ω تسمى الحدث الأكيد و المجموعة الفارغة $\emptyset$ تسمى الحدث المستحيل.
- كل حدث مكون من امكانية واحدة يسمى حدثا ابتدائيا.
- مجموعة الإمكانيات التي لا تنتمي الى الحدث A تسمى الحدث المضاد ل A ونرمز لها بالرمز $\bar{A}$.
- الحدث $A \cap B$ مكون من جميع الامكانيات التي تحقق الحدثين A و B في نفس الوقت.
- نقول إن الحدثين A و B غير منسجمين إذا كان $A \cap B = \emptyset$.
- الحدث $A \cup B$ مكون من جميع الإمكانيات التي تحقق الحدث أو الحدث B(أي أحدهما على الأقل).

تطبيق:

نرمي نردا مكعبا عير مغشوش مرتين متتابعتين. نرمز لنتائج هذه التجربة العشوائية بالزوج $(a;b)$ حيث a نتيجة الرمية الأولى و b نتيجة الرمية الثانية.

1. ما هو كون أمكانيات هذه التجربة العشوائية و ما هو عدد عناصره؟
2. حدد الأحداث التالية:

- الحدث A:" الحصول على عددين متساويين".
- الحدث B:" الحصول على عددين زوجيين".
- الحدث C:" الحصول على عددين مجموعهما يساوي 9".
- الحدث $A \cap B$.

2. احتمال حدث:

نشاط:

أراد مترشح اجتياز مباراة شفوية مكونة ستة أسئلة : $\{a,b,c,d,e,f\}$. يختار المترشح أحد هذه الأسئلة، إذا أجاب عن السؤال يكون ناجحا و إذا لم يجب يرسب.

1. حدد فضاء الإمكانيات.
2. في حالة حضر هذا المترشح السؤال $\{a\}$. ما هو احتمال نجاحه في هذه المباراة؟
3. في حالة حضر هذا المترشح الأسئلة $\{a,e,f\}$. ما هو احتمال نجاحه في هذه المباراة؟
4. في حالة حضر هذا المترشح الأسئلة الستة كاملة. ما هو احتمال نجاحه في هذه المباراة؟
5. في حالة لم يحضر هذا المترشح أي سؤال. ما هو احتمال نجاحه في هذه المباراة؟

تعريف:

ليكن Ω كون امكانية تجربة عشوائية.

- احتمال حدث A هو مجموع احتمالات الاحداث الابتدائية التي توجد ضمن A ونرمز له بالرمز $P(A)$.
- العلاقة التي تربط كل حدث A بالعدد $P(A)$ تسمى احتمالا على كون الامكانيات Ω.

ملاحظات:

- $\mathcal{P}(\emptyset) = 0$.
- $\mathcal{P}(\Omega) = 1$.
- $0 \leq \mathcal{P}(A) \leq 1$ لكل حدث A ضمن Ω.

مثال:

نرمي نردا مكعبا غير مغشوش مرة واحدة في الهواء. كون الإمكانيات هو : $\Omega = \{1,2,3,4,5,6\}$.

نعتبر الأحداث التالية:

- الحدث A:" الحصول على عدد زوجي وقابل للقسمة على 3".
- الحدث B:" الحصول على عدد أولي".

لدينا : $A = \{6\}$ و $B = \{2,3,5\}$. إذن:

$$P(A) = P(\{6\}) = \frac{1}{6}$$

$$P(B) = P(\{2,3,5\}) = P(\{2\}) + P(\{3\}) + P(\{5\}) = \frac{1}{6} + \frac{1}{6} + \frac{1}{6} = \frac{3}{6} = \frac{card(B)}{card(\Omega)}$$

تطبيق:

نرمي ثلاث مرات قطعة نقدية غير مغشوشة. نعتبر الأحداث التالية:

- الحدث A:" الحصول على الوجه F مرة واحدة بالضبط".
- الحدث B:" الحصول على الظهر P مرة واحدة على الأكثر".

1. باستعمال شجرة الاختيارات، حدد كون الإمكانيات.
2. أحسب احتمال الأحداث : A ، B، $A \cap B$ و $A \cup B$.

تطبيق:

نرمي مرة واحدة نردا رباعي الأوجه وجوهه تحمل الأرقام *1*،*2*،*3* و*4* بحيث: $P(\{1\}) = 0,3$ و $P(\{2\}) = 0,1$ و $P(\{3\}) = 0,4$ و $P(\{4\}) = 0,2$.

أحسب احتمال الأحداث التالية: $A = \{2,4\}$ ، $B = \{1,2,4\}$ و $A = \{6\}$ و $C = \{1,2,3,4\}$.

مبرهنة:(فرضية تساوي الاحتمالات):

ليكن Ω كون امكانية تجربة عشوائية.

إذا كانت الأحداث الابتدائية متساوية الاحتمال في كون الإمكانيات فإن لكل حدث A من Ω. فإن:

$$P(A) = \frac{card(A)}{card(\Omega)}$$

خاصية:

- ليكن A و B حدثين من Ω. لدينا: $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$.
- إذا كان A و B حدثين غير منسجمين، فإن: $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$.

○ $P(\bar{A}) = 1 - P(A)$

تطبيق:

تحتوي كيس على 3 كرات حمراء وكرتين خضراوين وكرة واحدة بيضاء. نسحب تأنيا كرتين من الكيس.

نعتبر الأحداث التالية :

- الحدث A:" الحصول على كرة واحدة حمراء فقط".
- الحدث B:" الحصول على كرة واحدة خضراء فقط".
- الحدث C:" الحصول على كرة واحدة خضراء على الأقل".

أحسب احتمال الأحداث A، B، C، $\bar{C}$، $A \cap B$ و $A \cup B$.

تمرين:

يحتوي كيس على ثلاث بيدقات بيضاء تحمل الأرقام 1،1 ، 2 وعلى أربع بيدقات سوداء تحمل الأرقام 1،2،2، 2.

نسحب عشوائيا بالتتابع وبدون احلال ثلاث بيدقات من الكيس.

إذا علمت انه لا يمكن التمييز بين البيدقات باللمس، أحسب احتمالات الأحداث التالية:

- الحدث A:" الحصول على ثلاث بيدقات لها نفس اللون".
- الحدث B:" الحصول على الأقل على بيدقة بيضاء".
- الحدث C:" الحصول على ثلاث بيدقات تحمل نفس الرقم".
- الحدث D:" الحصول على ثلاث بيدقات مجموع ارقامها عدد زوجي".
- الحدث E:" الحصول على ثلاث بيدقات مجموع ارقامها عدد فردي".

III. الاحتمال الشرطي:

نشاط:

يتكون قسم من 23 تلميذ موزعين حسب الجدول التالي:

	المكررون	الجدد	المجموع
الذكور	8	3	11
الإناث	7	5	12
المجموع	15	8	23

1. نختار عشوائيا تلميذا من القسم، نفترض ان جميع التلاميذ لهم نفس الاحتمال لكي يتم اختيارهم.

أ- أحسب احتمال كل من الأحداث التالية:

- الحدث G:" اختيار تلميذ ذكر".
- الحدث F:" اختيار تلميذة".
- الحدث I:" اختيار تلميذ مكرر".

ب- أحسب $P(G \cap I)$ و $P(F \cap I)$.

2. أ-علما أن التلميذ المختار من الذكور. ما هو احتمال ان يكون مكررا؟ نرمز لهذا الاحتمال بالرمز $P_G(I)$.

ب- تحقق أن: $P_G(I) = \frac{P(G \cap I)}{P(G)}$.

ج- ماذا تمثل الكتابات التالية: $P_F(I)$ و $P_I(F)$ و $P_I(G)$؟ أحسبها.

تعريف:

ليكن A و B حدثين ضمن Ω بحيث $\mathcal{P}(A) \neq 0$.

احتمال الحدث B علما أن الحدث A محقق هو : $\mathcal{P}_A(B) = \mathcal{P}(B/A) = \frac{\mathcal{P}(A\cap B)}{\mathcal{P}(A)}$

تطبيق:

يحتوي كيس على خمس بيدقات بيضاء تحمل الأرقام *1*،*1*، *0*،*1* ، *0* وعلى أربع بيدقات حمراء تحمل الأرقام *1*،*1*، *0* ، *0*، وعلى بيدقتين لونهما أخضر وتحملان الارقام *0*،*1*. نسحب عشوائيا بالتتابع وبدون احلال ثلاث بيدقات من الكيس.

1. إذا علمت انه لا يمكن التمييز بين البيدقات باللمس، أحسب احتمالات الأحداث التالية:
   - الحدث A:" الحصول على ثلاث بيدقات لها نفس اللون".
   - الحدث B:" الحصول على بيدقات لها نفس الرقم".
   - الحدث C:" الحصول على ثلاث بيدقات مختلفة اللون مثنى مثنى".
2. علما أن الكرات لها نفس اللون، ما هو احتمال ان يكون لها نفس الرقم؟
3. علما ان الكرات المسحوبة لها نفس الرقم، ما هو احتمال ان تكون مختلفة اللون مثنى مثنى؟

IV. استقلالية حدثين- استقلالية اختبارين:

1. استقلال حدثين :

تعريف:

نقول أن الحدثين A و B مستقلان اذا كان: $\mathcal{P}(A \cap B) = \mathcal{P}(A).\mathcal{P}(B)$.

نتيجة:

- ليكن A وB حدثان بحيث $\mathcal{P}(A) \neq 0$. A وB مستقلان إذا وفقط إذا كان $\mathcal{P}_A(B) = \mathcal{P}(B)$.

مثال:

نرمي نردا مكعبا غير مغشوش مرة واحدة في الهواء. نعتبر الأحداث التالية:

- الحدث A:" الحصول على رقم فردي".
- الحدث B:" الحصول على الرقم 3 ".

لدينا : $P(A \cap B) = \frac{1}{6}$ و $P(A) \times P(B) = \frac{3}{6} \times \frac{1}{6} = \frac{1}{12}$.

إذن: $P(A) \times P(B) \neq P(A \cap B)$, وبالتالي A وB غير مستقلان.

تطبيق:

يحتوي كيس على تسع كرات لا يمكن التمييز بينها باللمس:

كرتان بيضاوان تحملان الرقم *1*، وثلاث كرات حمراء تحمل الارقام *1*،*1*، *2*، وأربع كرات سوداء تحمل الأرقام *1*،*1*، *2* ، *2*. نسحب عشوائيا وفي ان واحد ثلاث كرات من الكيس.

1. احسب احتمال الأحداث التالية:
   - الحدث A:" الكرات المسحوبة مختلفة الالوان مثنى مثنى".
   - الحدث B:" الكرات المسحوبة تحمل نفس الرقم".

ذ.لطرش عبد الكبير

2. هل الحدثان AوB مستقلان؟

2. الاختبارات المتكررة:

خاصية:

ليكن A حدثا احتماله $\mathcal{P}$ في اختبار عشوائي.
اذا اعيد هذا الإختبار n مرة فإن احتمال وقوع A بالضبط k $(k \leq n)$ مرة بالضبط هو $C_n^k p^k (1-p)^{n-k}$

مثال:

عند رمي نرد مكعب غير مغشوش اربع مرات متتالية فإن احتمال الحصول على العدد 2 ثلاث مرات هو :
$C_4^3 \times (\frac{1}{6})^3 (1-\frac{1}{6})^{4-3} = \frac{5}{324}$

تطبيق:

الاحتمال لكي يصيب رام الهدف هو $\frac{2}{3}$. قام هذا الرامي بعشر محاولات.
ما هو الاحتمال لكي يصيب الهدف ست مرات بالضبط.

V. المتغير العشوائي- القانون الحداني:

1. المتغير العشوائي:

نشاط:

نرمي قطعة نقدية في الهواء ثلاث مرات متتالية. نرمز ب X لعدد المرات التي يظهر فيها الوجه F.

1. حدد كون الإمكانيات ثم استنتج القيم التي يمكن ان يأخذها المتغير X.
2. ماذا تعني الأحداث التالية:$(X = 1)$ و $(X = 2)$.
3. تحقق ان: $P(X = 1) = \frac{3}{8}$.
4. املأ الجدول التالي:

x_i	0	1	2	3
$P(X = x_i)$				

تعريف:

ليكن Ω كون امكانيات تجربة عشوائية. كل دالة X معرفة من Ω نحو $\mathbb{R}$ تسمى متغيرا عشوائيا على Ω.

تطبيق:

يحتوي كيس على 6 كرات بيضاء و كرتين سوداوين. نسحب من الكيس كرتين بالتتابع و باحلال.
ليكن X المتغير العشوائي الذي يربط كل سحبة بعدد الكرات البيضاء المسحوبة.

1. حدد $X(\Omega)$.
2. ضع جدول قانون احتمال X .

تمرين:

نعتبر اللعبة التالية:

" يحتوي كيس على اربع كرات بيضاء وكرتين لونهما أسود لا يمكن التمييز بينها باللمس. على اللاعب ان يسحب كرتين في ان واحد. في كل سحبة يربح اللاعب درهما (+1) عن كل كرة بيضاء ويخسر درهما عن كل كرة سوداء"

نرمز ب X لربح اللاعب.

ضع جدول قانون احتمال X.

تعاريف:

ليكن Ω كون امكانيات تجربة عشوائية و X متغيرا عشوئيا معرفا على Ω و $X(\Omega) = \{x_1, \dots, x_n\}$ مجموعة قيم X.

- الأمل الرياضي للمتغير العشوائي X هو العدد الحقيقي الذي نرمز له ب $E(X)$ المعرف بما يلي :
$$E(X) = x_1P(X = x_1) + x_2P(X = x_2) + \dots + x_nP(X = x_n)$$
- مغايرة المتغير العشوائي X هو العدد الحقيقي الموجب الذي نرمز له ب $V(X)$ و المعرف بما يلي:
$$V(X) = {x_1}^2P(X = x_1) + {x_2}^2P(X = x_2) + \dots + {x_n}^2P(X = x_n) - [E(X)]^2$$
- العدد $\sigma(X) = \sqrt{V(X)}$ يسمى الإنحراف الطرازي للمتغير X.

مثال:

نعتبر متغيرا عشوائيا X جدول قانون احتماله كالتالي:

x_i	-1	1	2
$P(X = x_i)$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$

- الأمل الرياضي: $E(X) = (-1).\frac{1}{2} + 1.\frac{1}{4} + 2.\frac{1}{4} = \frac{1}{4}$.
- المغايرة: $V(X) = (-1)^2.\frac{1}{2} + 1^2.\frac{1}{4} + 2^2.\frac{1}{4} - \left(\frac{1}{4}\right)^2 = \frac{27}{16}$.
- الانحراف الطرازي: $\sigma(X) = \sqrt{\frac{27}{16}} = \frac{\sqrt{27}}{4}$.

2. المتغير الحداني:

نعتبر تجربة مكونة من اعادة نفس الإختبار n مرة. ليكن A حدثا من هذا الإختبار بحيث $\mathcal{P}(A) = p$

نعلم ان الإحتمال لكي يتحقق الحدث A، k مرة $(k \leq n)$ هو : $C_n^k p^k (1-p)^{n-k}$

المتغير العشوائي الذي يربط كل نتيجة ب $\mathcal{P}(X = k)$ عدد المرات التي يتحقق فيها الحدث A يسمى متغيرا عشوائيا حدانيا.

العددان n و p يسميان وسيطا المتغير الحداني .

خاصية

ليكن X متغيرا عشوائيا حدانيا وسيطاه n و p. لدينا :
$$\forall k \epsilon \{0,1, \dots, n\} \quad \mathcal{P}(X = k) = C_n^k p^k (1-p)^{n-k}$$

مثال:

نرمي قطعة نقدية 5 مرات متتابعة. ليكن X المتغير العشوائي الذي يربط كل نتيجة بعدد المرات التي ظهر فيها الوجه F.

لدينا قانون احتمال حداني وسيطاه : $n=5$ و $p = \mathcal{P}(F) = \frac{1}{2}$.

و لدينا : $\forall k \epsilon \{0,1, \dots, 5\} \quad \mathcal{P}(X = k) = C_5^k (\frac{1}{2})^k (\frac{1}{2})^{5-k}$

خاصية:

ليكن X متغيرا عشوائيا حدانيا وسيطاه n و p.

الأمل الرياضي ل X هو : $E(X) = np$ و مغايرته هي $V(X) = np(1-p)$.